Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 07.07.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 11+5*

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 11

28. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Beweisen Sie Theorem 3.1.13, d.h. zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k}$ ein Skalarprodukt auf $H^k(I;\mathbb{K})$ ist und dass $(H^k(I;\mathbb{K}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k})$ ein Hilbertraum ist. (5*)

29. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes, offenes Intervall, sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $[u] \in H_0^1(I;\mathbb{K})$. Zeigen Sie die sogenannte Poincaré-Ungleichung: (3)

$$\langle [u], [u] \rangle_{L^2(I;\mathbb{K})} \le |I|^2 \langle [u]', [u]' \rangle_{L^2(I;\mathbb{K})},$$

wobei $|I|$ die Länge von I bezeichnet.

Tipp: Verwenden Sie Proposition 3.1.14 um zunächst eine Abschätzung für die ∞-Norm des stetigen Repräsentanten von $[u]$ herzuleiten.

30. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf V. Die beiden Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen *äquivalent*, wenn es reelle Zahlen $c, C > 0$ mit der Eigenschaft

$$c\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1 \qquad \text{für alle } v \in V$$

gibt.

(a) Zeigen Sie: Wenn die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind und wenn $(V, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum ist, dann ist auch $(V, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum. (4)

(b) Sei nun $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und sei $V = H_0^1(I;\mathbb{K})$. Zur Erinnerung: Für alle $[u], [v] \in H^1(I;\mathbb{K})$ (und somit insbesondere für alle $[u], [v]$ in $H_0^1(I;\mathbb{K})$) ist (4)

$$\langle [u], [v] \rangle_{H^1} := \langle [u], [v] \rangle_{L^2} + \langle [u]', [v]' \rangle_{L^2}.$$

Zudem ist

$$\langle [u], [v] \rangle_{H_0^1} := \langle [u]', [v]' \rangle_{L^2}$$

für alle $[u], [v] \in H_0^1(I;\mathbb{K})$.

Zeigen Sie, dass, wie in Korollar 3.1.20 behauptet, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$ ein Skalarprodukt auf $H_0^1(I;\mathbb{K})$ ist und dass $(H_0^1(I;\mathbb{K}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1})$ ein Hilbertraum ist.

Tipp: Verwenden Sie die Poincaré-Ungleichung und Teilaufgabe (a).