Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 12

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 02.06.2017

Lösungsvorschlag Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 6,A16

16. Wir definieren wie auf Blatt 4 $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ als den (Hilbert-) Raum aller quadratsummierbaren Folgen. (4)
Außerdem sei e_n die Folge, die an allen Stellen eine Null hat außer an der n-ten, wo sie eine Eins hat. Zeigen Sie, dass die unbedingte Reihe über $\left(\frac{1}{n}e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, aber die Reihe $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ in $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ nicht absolut konvergiert.

Lösungsvorschlag: Es bezeichne wie üblich $\mathcal{F}$ die gerichtete Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit der Teilmengenrelation. Nach Proposition 2.2.9 (und der Vollständigkeit von ℓ^2) haben wir zwei Möglichkeiten, die Konvergenz der unbedingten Reihe zu zeigen. Die Erste ist, zu zeigen, dass

$$\left(\sum_{n\in F}\frac{1}{n}e_n\right)_{F\in\mathcal{F}} \tag{1}$$

ein Cauchy-Netz ist. Die Zweite ist, den Grenzwert zunächst zu raten und dann die Definition der Netzkonvergenz für diesen Grenzwertkandidaten zu verifizieren. Wir haben uns in diesem Lösungsvorschlag für die Zweite entschieden. Das heißt aber nicht, dass es unmöglich ist mit der Ersten zu arbeiten, zumal die Aufgabe nicht nach dem Grenzwert fragt. Gehen wir für einen Moment intuitiv an die Sache heran und postulieren, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}e_n = \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right) =: x. \tag{2}$$

Nun zurück zur formellen Argumentation. x ist quadratsummierbar, da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty. \tag{3}$$

(Man beachte: Hier steht nach Blatt 4 diesmal 'nur' die Analysis-1-Reihe wir müssen uns an dieser Stelle keine Gedanken über Konvergenz der unbedingten Reihe machen!($*$)) Nun sei $\epsilon > 0$. Wir zeigen: Es gibt eine endliche Teilmenge $F \subset \mathbb{N}$ sodass für jede endliche Obermenge G von F gilt

$$\left\|\sum_{n\in G}\frac{1}{n}e_n - x\right\|_{\ell^2} < \epsilon \tag{4}$$

Hierzu gehen wir ähnlich vor wie im letzten Teil von Aufgabe 15. Aufgrund von (3) gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ sodass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \tag{5}$$

(Wieder im Ana-1-Sinn). Nun wählen wir $F = \{1,...,N\}$ und bekommen für eine beliebige endliche Obermenge $G \supseteq F$:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n\in G}\frac{1}{n}e_n - x\right\|_{\ell^2} &\leq \left\|\sum_{n\in F}\frac{1}{n}e_n - x\right\|_{\ell^2} + \left\|\sum_{n\in G\setminus F}\frac{1}{n}e_n\right\|_{\ell^2} && (6)\\
&= \left\|\left(0,...,0,\frac{1}{N+1},\frac{1}{N+2},...\right)\right\|_{\ell^2} + \sqrt{\sum_{n\in G\setminus F}\frac{1}{n^2}} && (7)\\
&= \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + \sqrt{\sum_{n\in G\setminus F}\frac{1}{n^2}} && (8)
\end{aligned}$$

Nun ist $G \setminus F \subset \{N+1, N+2, ...\}$ und damit gilt

$$\sum_{n \in G\setminus F} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\max G\setminus F} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{9}$$

Daraus schließen wir

$$\left\| \sum_{n \in G} \frac{1}{n} e_n - x \right\|_{\ell^2} \leq 2 \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \tag{10}$$

womit die Behauptung gezeigt wäre.
Abschließend zur absoluten Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{1}{n} e_n \right\|_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} ||e_n||_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}, \tag{11}$$

da $||e_n||_{\ell^2} = 1$, wie man leicht nachrechnet. Dieser Ausdruck besitzt aber für $N \to \infty$ keinen Grenzwert, da die harmonische Reihe divergiert. Damit folgt die Behauptung. $\square$
Ein paar Bemerkungen:

- Bei $(*)$ kommt dann eine Frage auf: Ist der $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ definiert auf Blatt 4 derselbe, wie der $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ wenn man ihn wie in Beispiel 2.3.7 definiert ? Die Antwort ist hier ja, und dafür lese man nochmal Bemerkung 2.2.14 und den sogenannten Riemannschen Umordnungssatz.

- Einer der Gründe, warum wir diese Aufgabe sinnvoll fanden, war, dass sie zeigt, dass in Bemerkung 2.2.13 $(ii) \Rightarrow (i)$ im Allgemeinen nicht gilt. Betrachtet man den oben genannten Umordnungssatz jedoch, so kann man zeigen, dass $(ii) \Rightarrow (i)$ auf endlichdimensionalen Räumen gilt. Damit handelt es sich um eine weitere erstaunliche Eigenschaft unendlichdimensionaler Räume. Die Erklärung hier hat einige Lücken, wer diese geschlossen haben möchte der kann gerne immer fragen stellen oder in die Sprechstunde kommen.