Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+8*

Übungen Maßtheorie: Blatt 2

4. Sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß.

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda(A) = 0$ für jede höchstens abzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt. (3)

(b) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Menge. Zeigen Sie, dass $\lambda(B) > 0$ gilt. (2)

(c) Zeigen Sie, dass $\lambda(\mathbb{R}^n) = \infty$ gilt. (2)

(d) Sei nun $n = 2$ und sei $C := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0, 1]\}$. Zeigen Sie, dass $\lambda(C) = 0$ gilt. (4)

5. Sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß und sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt $A(M) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (4)
Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\{M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \ A(M) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ *eine* σ*-Algebra ist.*

(b) Zeigen Sie: Ist $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein von Null verschiedenes, translations-invariantes Maß, so gilt $\mu([0, 1)^n) > 0$. (3)
Zeigen Sie zudem: Wenn $\mu([0, 1)^n) < \infty$ gilt, dann ist $\mu(M) = \mu([0, 1)^n) \cdot \lambda(M)$ für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Zeigen Sie: Für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\lambda\big(A(M)\big) = \lambda\big(A([0, 1)^n)\big) \cdot \lambda(M)$. (2)

(d) Sei $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $0 < \lambda(X) < \infty$. Zudem sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein translations-invariantes Maß mit der Eigenschaft $\mu(X) = \lambda(X)$. Zeigen Sie, dass $\mu = \lambda$ gilt. (1*)

(e) Sei nun A orthogonal, d.h. es gelte $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\lambda(A(M)) = \lambda(M)$ für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt (d.h. λ ist invariant unter Drehspiegelungen). (2*)

(f) Sei nun A wieder beliebig. Zeigen Sie, dass $\lambda\big(A([0, 1)^n)\big) = |\det(A)|$ gilt. (5*)
Hinweis zu (f): Sie dürfen den Satz über die Polarzerlegung benutzen; dieser besagt, dass es eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und eine symmetrische, positiv definite Matrix* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt derart, dass* $A = UP$ *ist.*