UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 08.11.2017

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück

Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+6*

Übungen Maßtheorie: Blatt 3

6. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 = 0\}$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist und dass $\lambda(A) = 0$ gilt (wobei λ wie üblich das Lebesgue-Maß bezeichnet). (4)

(b) Eine Teilmenge $H \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Hyperebene*, falls es einen Vektor $g \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle g, x \rangle = \alpha\}$ gibt. (5)

Zeigen Sie: Jede Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ ist eine Borelmenge und hat Lebesgue-Maß 0.

Tipp: Aufgabe 5 auf Blatt 2 ist hier sehr nützlich (zum Beispiel Aufgabe 5(e)).

Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen (Ω, d) und (Ω', d'). Man kann zeigen: Wenn f stetig ist, dann ist f automatisch (Ω, Ω')-messbar (Korollar 2.5 in der Vorlesung). Dies ist für Teilaufgabe (b) der folgenden Aufgabe sehr hilfreich.

7. (a) Geben Sie einen vollständigen Maßraum an, in dem $\emptyset$ die einzige Nullmenge ist. (2)

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Wenn $M \times \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt, dann gilt $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (4)

(c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $M \times \{0\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ist und dass $\lambda^2(M \times \{0\}) = 0$ gilt (wobei $\lambda^2 : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß bezeichnet). (2)

(d) Zeigen Sie: Es gibt eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die Lebesgue-messbar aber nicht Borel-messbar ist. (3)

8. Zeigen Sie: Es gibt ein von Null verschiedenes Maß $\mu : \mathcal{B}\big((0, \infty)\big) \to [0, \infty]$ mit den folgenden beiden Eigenschaften: (6*)

(a) $\mu([1, 2)) < \infty$.

(b) $\mu(\alpha M) = \mu(M)$ für alle $M \in \mathcal{B}\big((0, \infty)\big)$ und alle $\alpha \in (0, \infty)$.