Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 22.11.2017

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück

Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+6*

Übungen Maßtheorie: Blatt 5

13. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $\emptyset \neq M \in \mathcal{A}$. Das Mengensystem

$$\mathcal{A}|_M := \{A \cap M : \ A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$$

heißt die *Spur-σ-Algebra* von $\mathcal{A}$ auf M.

(a) Zeigen Sie: Die Spur-σ-Algebra $\mathcal{A}|_M$ ist tatsächlich eine σ-Algebra auf M. (3)

(b) Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem mit der Eigenschaft $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$. Wir definieren $\mathcal{E}|_M := \{E \cap M : \ E \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}|_M = \sigma(\mathcal{E}|_M)$ gilt. (5)

Hinweis: Eine der beiden Inklusionen ist einfach; für die andere Inklusion ist es hilfreich zu zeigen, dass das Mengensystem $\{A \in \mathcal{P}(\Omega) : \ A \cap M \in \sigma(\mathcal{E}|_M)\}$ eine σ-Algebra auf Ω ist.

(c) Sei nun (S, d) ein metrischer Raum und sei $\emptyset \neq N \subseteq S$. Dann ist $(N, d|_{N \times N})$ ebenfalls ein metrischer Raum. Zeigen Sie: (3)

Eine Menge $B \subseteq N$ ist genau dann offen im metrischen Raum $(N, d|_{N\times N})$, wenn es eine offene Menge U im metrischen Raum (S, d) mit der Eigenschaft $B = U \cap N$ gibt.

(d) Sei (S, d) ein metrischer Raum und sei $N \subseteq S$ nichtleer und Borel-messbar; wir versehen N wie in der vorangehenden Teilaufgabe mit der Metrik $d|_{N\times N}$. (3)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(S)|_N$ gilt.

(e) Zeigen Sie die Gleichheiten $\mathcal{B}([0, 1]) = \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{[0,1]}$ und $\mathcal{B}((0, 1)) = \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{(0,1)}$. (1)

14. Es bezeichne $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß und es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (5)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f \in T_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gilt und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f \ \mathrm{d}\lambda$.

15. Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe 12 auf Blatt 4.

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_{\Omega'} s \,\mathrm{d}\mathbb{P}$. (3*)

(b) Betrachten Sie die positiven Treppenfunktionen $\hat{z} : \Omega' \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a$ und $z : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a$. Berechnen Sie die beiden Integrale $\int_{\Omega'} \hat{z} \,\mathrm{d}\mathbb{P}$ und $\int_{\Omega} z \,\mathrm{d}f(\mathbb{P})$. (3*)

Bemerkungen:

(i) Sie werden sehen, dass beide Integrale gleich sind.

(ii) Es gilt offensichtlich $\hat{z} = z \circ f$. Somit lässt sich die Gleichheit der beiden Integrale als $\int_{\Omega'} z \circ f \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\Omega} z \,\mathrm{d}f(\mathbb{P})$ schreiben. Wir werden später noch sehen, dass dieser Zusammenhang auch in sehr allgemeinen Situationen gilt.