Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 10.01.2018

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20+6*

Übungen Maßtheorie: Blatt 10

29. Sei $f : [\pi, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

(a) Zeigen Sie, dass f uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (5)
Tipp: Partielle Integration!

(b) Beweisen Sie, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (4)
Tipp: Betrachten Sie die Werte von $|f|$ auf Intervallen der Form $[(2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+\frac{3}{4})\pi]$ für $k \in \mathbb{N}$.

30. (a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für zwei verschiedene Funktionen $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ an (wobei λ wie üblich das Lebesgue-Maß bezeichnet), deren Äquivalenz-Klassen in $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gleich sind. (1)

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum (d.h. es sei $\mu(\Omega) < \infty$) und sei $1 \le p_1 < p_2 < \infty$. Zeigen Sie: Ist $f \in L_{p_2}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, so ist auch $f \in L_{p_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. (5)
Tipp: Wenden Sie die Hölder-Ungleichung für $p := \frac{p_2}{p_1}$ auf zwei geeignete Funktionen an.

(c) Zeigen Sie anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass die Aussage aus (b) im Allgemeinen nicht gilt, wenn der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ lediglich σ-endlich ist. (5)

31. In dieser Aufgabe wiederholen wir die Youngsche Ungleichung. Seien $a, b \in [0, \infty)$, sei $p \in (1, \infty)$ und sei $p' \in (1, \infty)$ diejenige eindeutig bestimmte Zahl, für welche $1/p + 1/p' = 1$ gilt. Die Youngsche Ungleichung lautet

$$ab \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

(a) Beweisen Sie die Youngsche Ungleichung im Fall $p = 2$. (2*)
Hinweis: Der Beweis ist sehr elementar!

(b) Zeigen Sie die Ungleichung vom gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel: Für alle $c, d \in [0, \infty)$ gilt (3*)

$$c^{\frac{1}{p}} d^{\frac{1}{p'}} \le \frac{1}{p} c + \frac{1}{p'} d.$$

Tipp: Wenden Sie die Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen auf eine geeignete Funktion an.

(c) Beweisen Sie die Youngsche Ungleichung. (1*)