Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 18.01.2018

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20

Übungen Maßtheorie: Blatt 11

32. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ eine reell-wertige, wesentlich beschränkte Funktion. Zudem sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine wesentlich beschränkte Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall gegen f konvergiert. (5)

(b) Sei f die Funktion aus (a). Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm gegen f konvergiert. (4)

(c) Zeigen Sie, dass $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Banachraum ist. (1)

33. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. ein Maßraum mit $\mu(\Omega) = 1$, und sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, d.h. es gelte $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in [0, 1]$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $s, m, t \in \mathbb{R}$ mit $s < m < t$ die Ungleichung (3)

$$\frac{\varphi(m) - \varphi(s)}{m - s} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(m)}{t - m}$$

gilt.

(b) Sei $m \in \mathbb{R}$ fest. Zeigen Sie, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $\varphi(t) \geq \varphi(m) + \alpha(t - m)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. (3)

(c) Es sei $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und es gelte auch $\varphi \circ f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie die Ungleichung (4)

$$\varphi\Big(\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\Big) \leq \int_\Omega \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$