Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 24.01.2018

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20

Übungen Maßtheorie: Blatt 12

34. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie: Es gilt fast überall $f = 0$ genau dann, wenn $\int_A f \, d\mu = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. (3)

Sei nun $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ein durchschnitts-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$ und es gebe eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$. Seien $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und es gelte $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$ für alle $E \in \mathcal{E}$.

(b) Zeigen Sie, dass fast überall $f = g$ gilt, falls fast überall $f \geq 0$ und $g \geq 0$ gilt. (4)

Tipp: Betrachten Sie die beiden Maße $f \odot \mu$ und $g \odot \mu$ (vgl. Korollar 3.16).

(c) Sei $h \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und es gelte $\int_E h \, d\mu = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass fast überall $h = 0$ gilt. (2)

Tipp: Betrachten Sie die beiden Funktionen $|h|$ und $h + |h|$.

(d) Zeigen Sie, dass fast überall $f = g$ gilt. (1)

35. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Wie in Bemerkung 6.15(v) setzen wir $M(\Omega, \mathcal{A}) := \{[f] : f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$. Zudem definieren wir

$$\mathrm{d}([f],[g]) = \int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \, d\mu \qquad \text{für alle } [f],[g] \in M(\Omega, \mathcal{A}).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}([f],[g]) \in [0,\infty)$ für alle $[f],[g] \in M(\Omega, \mathcal{A})$ gilt. (1)

(b) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $M(\Omega, \mathcal{A})$ ist. (5)

(c) Sei $[f] \in M(\Omega, \mathcal{A})$ und sei $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann im Maß gegen f konvergiert, wenn die Folge $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich d gegen $[f]$ konvergiert. (4)