Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 31.01.2018

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 20

Übungen Maßtheorie: Blatt 13

36. Seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ zwei Folgen nicht-negativer Zahlen, und seien die Maße $\mu,\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ gegeben durch $\mu(A) = \sum_{n\in A} p_n$ und $\nu(A) = \sum_{n\in A} q_n$ für alle $A \subseteq \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$. (3)

(b) Bestimmen Sie das Produktmaß $\mu \otimes \nu$. (3)

37. Sei $[0,1]$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}([0,1])$ und dem Lebesgue-Maß λ ausgestattet. Zudem sei $\mathbb{N}$ mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als σ-Algebra und mit dem Zählmaß μ ausgestattet.

(a) Skizzieren Sie die Menge $M := \{(x,n) :\ x \in [0,\frac{1}{n^2}],\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,1] \times \mathbb{N}$. (2)

(b) Zeigen Sie, dass die Menge M aus Teilaufgabe (a) in der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$ liegt. (3)

(c) Berechnen Sie $(\lambda \otimes \mu)(M)$, wobei M die Menge aus Teilaufgabe (a) bezeichnet. (2)

38. Seien $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)$ für $k \in \{1,2,3\}$ jeweils σ-endliche Maßräume. Wir definieren

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3 := \big\{A_1 \times A_2 \times A_3 :\ A_k \in \mathcal{A}_k \text{ für alle } k \in \{1,2,3\}\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3)$ gilt. (5)

(b) Zeigen Sie, dass $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$ gilt. (2)