Übungen Maßtheorie: Blatt 15

42. Zeigen Sie: Die beiden Doppelintegrale (10*)

$$\int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}\lambda^1(x) \, \mathrm{d}\lambda^1(y)$$

und

$$\int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}\lambda^1(y) \, \mathrm{d}\lambda^1(x)$$

sind wohl definiert und voneinander verschieden. Welche Voraussetzung des Satzes von Fubini ist hier nicht erfüllt?

Tipp: Verwenden Sie, dass $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \arctan(\frac{x}{y})$ für alle $x, y > 0$ gilt.

Es gilt die folgende Aussage, die etwas allgemeiner ist als das Ergebnis, dass Sie in Aufgabe 40 bewiesen haben:

Proposition. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $B \subseteq \mathbb{R}^m$ und $C \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Borel-messbare Mengen. Dann gilt $\mathcal{B}(B) \otimes \mathcal{B}(C) = \mathcal{B}(B \times C)$, und für die Lebesgues-Maße λ^m auf B, λ^n auf C und λ^{m+n} auf $B \times C$ gilt $\lambda^m \otimes \lambda^n = \lambda^{m+n}$.*

Dieses Resultat dürfen Sie ab sofort verwenden.

43. Sei $f : \Omega := [1,2] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = e^{x^2 - \frac{y}{x}}$ für alle $(x,y) \in \Omega$. Berechnen Sie $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\lambda^2$. (5*)

44. Seien $a, b > 0$ und sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ die Ellipse (5*)

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

mit den Halbachsen-Längen a und b. Zeigen Sie, dass E Borel-messbar ist und berechnen Sie die Fläche $\lambda^2(E)$.

Tipp: Nach Vorlesung ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Menge $E_x := \{y \in \mathbb{R} : \ (x,y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}$ Borel-messbar (Lemma 8.1); ebenso ist nach Vorlesung die Funktion $\varphi_E : \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $\varphi_E(x) = \lambda^1(E_x)$ Borel-messbar (Lemma 8.2) und es gilt $(\lambda^1 \otimes \lambda^1)(E) = \int_\mathbb{R} \varphi_E(x) \, \mathrm{d}\lambda^1(x)$ (vgl. den Beweis von Satz und Definition 8.3). Damit können Sie sehr leicht die gesuchte Fläche berechnen.