Universität Ulm

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 100

Probeklausur zur Maßtheorie

1. Beweisen oder widerlegen Sie: (5 × 5)

(a) Jede Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) Die Menge $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$ ist eine σ-Algebra auf $\{1,2,3\}$.

(c) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und sei $A \in \Sigma$ eine endliche Menge. Dann ist A eine Nullmenge.

(d) Seien $f, g : [0,5] \to [0,\infty)$ Borel-messbar und bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $[0,5]$. Dann gilt $\int_{[0,5]} fg \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,5]} f \,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_{[0,5]} g \,\mathrm{d}\lambda$.

(e) Das Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ ist σ-endlich.

2. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Außerdem sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Teilmengen von Ω mit der Eigenschaft $A_n \downarrow \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. (15)

3. (a) Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß. Geben Sie eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mit folgenden Eigenschaften an: (10)

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$.

(ii) Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda \to \infty$ für $n \to \infty$.

(b) Sei $\Omega := \{-2,-1,0,1,2\}$. Geben Sie eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ mit den folgenden beiden Eigenschaften an: (5)

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) μ ist kein Maß.

4. Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß und es sei $h : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine Borel-messbare Funktion. Wir definieren $\mu(B) := \int_B h \,\mathrm{d}\lambda$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass μ ein Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert.

(a) Zeigen Sie für jede Funktion $f \in \mathcal{T}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Formel $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} fh \,\mathrm{d}\lambda$. (10)

(b) Zeigen Sie für jede Funktion $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Formel $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} fh \,\mathrm{d}\lambda$. (10)

(c) Sei nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und sei $fh \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Zeigen Sie: Es gilt $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ und $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} fh \,\mathrm{d}\lambda$. (10)

5. (a) Es sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ das Maß, das durch $\mu(A) = \sum_{k\in A} \frac{1}{k!}$ für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeben ist. Zudem sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$, $f(k) = 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = e^2 - 1$ gilt. (6)

(b) Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß und es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = -x\mathbb{1}_{[-3,-1]}(x) + \mathbb{1}_{[2,3]}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda$. (9)