Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Werner Balser
Florian Voss
SS 2009

Übungen zur Analysis II

Übungsblatt 10

Abgabetermin: Donnerstag, den 16. Juli 2009, vor der Vorlesung um 12.00 Uhr.
Das Übungsblatt und weitere Informationen zu *Analysis II* gibt es im Internet auf:

http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html

---

Aufgabe 1. (3+3+2 Punkte) Sei $B_1 = [0,1] \times [0,1], B_2 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $B_3 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$.

(a) Sei f über $B_i, i = 1,2,3$ integrierbar. Schreibe das Bereichsintegral von f über $B_i, i = 1,2,3$ als iteriertes Integral.

(b) Berechne die Bereichsintegrale

$$\int_{B_1} (x + y^3)\, dxdy, \quad \int_{B_2} xye^{(x^2+y^2)/2}\, dxdy, \quad \int_{B_3} \frac{\sin x}{x}\, dxdy\,.$$

(c) Sei nun $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z/2 \leq x^2+y^2 \leq z \leq 1, y \geq 0\}$. Berechne $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$.

Aufgabe 2. (3+2 Punkte) Sei $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2, y \geq 0, z \geq 0\}$, wobei $R_2 > R_1 > 0$.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Benutze die Substitutionsregel (Satz 8.5.1) mit $(x,y,z)^T = g(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)^T$ für $r \geq 0, \theta \in [0,\pi/2)$ und $\phi \in [0,\pi)$, um das Integral $\int_B f(x,y,z)\, dxdydz$ umzuformen.

(b) Berechne $\int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$.

Aufgabe 3. (2+2+2 Punkte) Berechne die Kurvenintegrale von f entlang γ, falls

(a) $f(x,y) = (x,y)^T$, $\gamma(t) = (t,t^2)^T, t \in [0,1]$.

(b) $f(x,y) = (2xy, x^2)^T$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)^T, t \in [0,2\pi]$ und $r > 0$ fest.

(c) $f(x,y) = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2))^T$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)^T, t \in [0,2\pi]$ und $r > 0$ fest.

Aufgabe 4. (3+4 Punkte) Untersuche, ob f ein Gradientenfeld ist. Bestimme gegebenenfalls eine zugehörige Stammfunktion.

(a) $f(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y+17)^T$ auf $\mathbb{R}^3$.

(b) $f(x,y) = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2))^T$ auf dem Gebiet $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)^T\}$ bzw. auf dem Gebiet $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0)^T : x \leq 0\}$.