# Universität Ulm

Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften

Werner Balser
Florian Voss
SS 2009

# Übungen zur Analysis II

## Übungsblatt 2

**Abgabetermin:** Donnerstag, den 14. Mai 2009, vor der Vorlesung um 12.00 Uhr
Das Übungsblatt und weitere aktuelle Informationen zur Veranstaltung *Analysis II* gibt es im Internet auf der Seite:

*http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html*

---

**Aufgabe 1. (2+2+2+2 Punkte)** Gib für die folgenden Mengen $B$ ohne Beweise jeweils $\overline{B}, \mathring{B}$ und $\partial B$ an. Entscheide, ob $B$ abgeschlossen oder offen ist. Skizziere die Menge $B$ in Teilaufgaben (a)-(c).

**(a)** $B = \{(x,y)^T : y = 2x+1\} \subset \mathbb{R}^2$.

**(b)** $B = \{(x,y)^T : x+y > 0, x \in [0,1], y \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$.

**(c)** $B = \{(x,y)^T : x \in (0,1), y < \frac{1}{x}\} \subset \mathbb{R}^2$.

**(d)** $B = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2. (2 Punkte)** Finde abzählbar viele abgeschlossene Mengen in einem normierten Raum $X$, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

**Aufgabe 3. (3 Punkte)** Sei $X$ ein normierter Raum, und seien $x_0 \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$. Zeige:

$$\overline{K(x_0, r)} = \{x \in X : \| x - x_0 \| \leq r\}.$$

**Aufgabe 4. (2+3 Punkte + 3 Zusatzpunkte)** Sei $X$ ein normierter Raum. Zeige:

**(a)** Ist $O \subset X$ offen und $B_i \subset X, i \in I$ abgeschlossen, dann ist $O \backslash (\cap_{i \in I} B_i)$ offen.

**(b)** $B \subset X$ ist genau dann offen, wenn $B \cap \partial B = \emptyset$.

**(c) Zusatzaufgabe:** Sei $X = \mathbb{R}$. Zeige: Jedes offene Intervall ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen offenen Intervallen.

**Aufgabe 5. (2+2+3 Punkte)**

**(a)** Sei $B = \{(x,y)^T : y = 2x+1\} \subset \mathbb{R}^2$. Zeige oder widerlege, dass $B$ bzw. $\mathring{B}$ kompakt ist.

**(b)** Sei $X$ ein normierter Raum und $x_1, \ldots, x_n \in X$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeige oder widerlege, dass $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ kompakt ist.

**(c)** Zeige: Ist $X$ ein normierter Raum und $K \subset X$ kompakt, dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von $K$ ebenfalls kompakt. Folgere, dass $\emptyset$ immer kompakt ist.