Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Übungen zur Analysis II

Werner Balser
Florian Voss
SS 2009

Übungsblatt 4

Abgabetermin: Donnerstag, den 28. Mai 2009, vor der Vorlesung um 12.00 Uhr.
Das Übungsblatt und weitere Informationen zu *Analysis II* gibt es im Internet auf:

http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html

---

Aufgabe 1. (2 Punkte) Seien X_1, X_2 normierte Räume, $\emptyset \neq D \subset X_1$ und $f : D \longrightarrow X_2$ Lipschitzstetig. Zeige: f ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte) Untersuche, ob die angegebenen Folgen (x_m) aus $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm konvergent sind und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $x_m = (\frac{1}{m}\,,\, e^{-m}\,,\, (\frac{1}{2})^m)^T \in \mathbb{R}^3$.

(b) $x_m = (\sum_{k=1}^m \frac{1}{3^k}\,,\, \frac{\sqrt{m^2+7}}{m+2}\,,\, (1-\frac{3}{m})^m)^T \in \mathbb{R}^3$.

(c) $x_m = (\sum_{k=1}^m \frac{1}{k}\,,\, \frac{2m+1}{m!})^T \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Überprüfe, ob die folgenden abgeschlossenen Mengen kompakt sind:

(a) $B = \{(x,y)^T : \frac{1}{5x^3} \leq y \leq \frac{1}{x}, x \in (0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $B = \{(x,y)^T : -\log(x) \leq y \leq \frac{1}{x}, x \in (0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Sei $A = [\alpha_{jk}]$ eine (n,m)-Matrix mit Elementen aus $\mathbb{R}$. Zeige für die folgenden Funktionen f, dass f stetig ist.

(a) $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = Ax + b$, wobei $b \in \mathbb{R}^n$.

(b) $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^T A x$, wobei $n = m$.

Aufgabe 5. (3+3+3 Punkte) Untersuche, ob für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf der Menge B das Maximum und Minimum existiert. Bestimme für (a) und (c) den Wertebereich $f(B)$ (gegebenenfalls in Abhängigkeit von $\max_{x\in B} f(x)$ und $\min_{x\in B} f(x)$, falls diese existieren). Diskutiere in (b), welche Fälle für $f(B)$ auftreten können.

(a) $f(x,y) = e^{xy+2}\cos(x+y)$, $B = \{(x,y)^T : |x| \leq 1, -1 \leq y \leq x^2\}$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $B = \{(x,y)^T : (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 1\} \cup ([1,2] \times [0,1])$.

(c) $f(x,y) = xy^2$, $B = \{(x,y)^T : |y| \leq 1\}$.

Hinweis: Es darf ohne Beweis entschieden werden, ob die Menge B abgeschlossen, beschränkt oder zusammenhängend ist. Es sollen $\max_{x\in B} f(x)$ und $\min_{x\in B} f(x)$ nicht berechnet werden!

Aufgabe 6. (3 Zusatzpunkte) Sie $C^1[0,1]$ die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Zeige, dass die Abbildung $g : C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ mit $g(f) = f'$ stetig ist, falls wir $C[0,1]$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ und $C^1[0,1]$ mit der Norm $\|\cdot\|$ betrachten, wobei $\| f \| := \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty$. Zeige weiter, dass g nicht stetig ist, wenn wir $C^1[0,1]$ mit $\|\cdot\|_\infty$ betrachten.