Übungen zur Analysis II

Werner Balser
Florian Voss
SS 2009

Übungsblatt 6

Abgabetermin: Donnerstag, den 18. Juni 2009, vor der Vorlesung um 12.00 Uhr.
Das Übungsblatt und weitere Informationen zu *Analysis II* gibt es im Internet auf:

http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html

---

Aufgabe 1. (3+3 Punkte) Zeige, dass die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar sind und berechne die Richtungsableitung im Punkt x_0 in Richtung e.

(a) $f(x,y) = e^{x-\pi}\sin(xy)$, $x_0 = (\pi, 1)$, $e = (2/3, \sqrt{5}/3)$.

(b) $f(x,y,z) = \log(\sqrt{x^2+y^2+1}) + xz^3$, $x_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1)$, $e = (\sqrt{5}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3)$.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Zeige, dass

(a) rationale Funktionen auf ihrem natürlichen Definitionsbereich total differenzierbar sind.

(b) affine Abbildungen $f(x) = Ax + b$ mit einer (m,n)-Matrix $A = [\alpha_{jk}]$ überall total differenzierbar sind und $f'(x) = A$ ist für $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Berechne alle zweiten partiellen Ableitungen von

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^2\cos(x_1^2 + x_2)$.

(b) $f(x) = x^T A x$, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A = [\alpha_{jk}]$ eine (n,n)-Matrix ist. Wie lassen sich die zweiten partiellen Ableitungen schreiben, wenn A symmetrisch ist?

Aufgabe 4. (2 Punkte) Bestimme den maximalen Definitionsbereich D der folgenden Funktion f. Zeige, dass f auf D total differenzierbar ist und bestimme die Funktionalmatrix.

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ \cos(x^2+y^2) \\ \log(y-x^2) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. (5 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeige, dass f partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen f_{x_1} und f_{x_2} in $(0,0)$ nicht stetig sind. Zeige weiter, dass f in $(0,0)$ total differenzierbar ist.

Aufgabe 6. (4 Zusatzpunkte) Zeige, dass die Besselfunktion J_n vom Index $n \in \mathbb{N}_0$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0\,,$$

wobei $J_n(x) = 1/\pi\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt$.