Universität Ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Werner Balser
Florian Voss
SS 2009

Übungen zur Analysis II

Übungsblatt 8

Abgabetermin: Freitag, den 3. Juli 2009, vor der Vorlesung im H22 um 8.00 Uhr.
Das Übungsblatt und weitere Informationen zu *Analysis II* gibt es im Internet auf:

`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html`

Aufgabe 1. (5 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar und $\xi \in D$ mit $f(\xi) = 0$, aber $\det f'(\xi) \neq 0$. Sei $\phi(x) = x - Af(x)$ für $x \in D$, wobei A eine (n,n)-Matrix ist mit $\| I - Af'(\xi) \| < 1$. Zeige, dass dann $\| \phi'(\xi) \| < 1$ ist und folgere daraus die Existenz eines $\varepsilon > 0$, für das ϕ die Kugel $\overline{K(\xi, \varepsilon)}$ in sich selbst abbildet und dort kontrahierend ist.

Aufgabe 2. (3+2+3 Punkte)

(a) Zeige, dass die Gleichung $y^2 + xz + z^2 - e^{xz} = 1$ in einer Umgebung von $(0, -1, 1)$ eindeutig in der Form $z = g(x, y)$ auflösbar ist. Berechne den Gradienten von g in $(0, -1)$.

(b) Finde eine (einfache) Funktion $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, für welche die Gleichung $f(x, y) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ unlösbar ist und $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

(c) Sei $(r, \phi)^T \longrightarrow f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$ für $r \in \mathbb{R}_+, \phi \in \mathbb{R}$. Zeige: Die Abbildung f ist lokal umkehrbar. Untersuche f auch auf globale Umkehrbarkeit.

Aufgabe 3. (2+3+2 Punkte) Finde die kritischen Punkte der folgenden Funktionen und überprüfe, ob ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt.

(a) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 3y$.

(b) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$.

(c) $f(x, y) = e^{x-2y} - x + y^2$.