Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Übungen zur Analysis II

Werner Balser
Daniel Hauer
SS 2009

Übungsblatt 9

Abgabetermin: Donnerstag, den 9. Juli 2009, vor der Vorlesung im H3 um 12.00 Uhr.
Das Übungsblatt und weitere Informationen zu *Analysis II* gibt es im Internet auf:

`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html`

Aufgabe 1.

(a) **(4 Punkte)** Bestimme Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = xy^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(b) **(4 Punkte)** Bestimme diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2 = 1$, die vom Punkt $(1, 1, 1)^T$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben.

Aufgabe 2.

(a) **(2+1 Punkte)** Berechne den inneren und äußeren Inhalt der Menge

$$M = \left\{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_k \in \mathbb{Q},\ 0 \le x_k \le 1\ \forall k = 1, \dots, n\right\}$$

und zeige, dass sie nicht Jordan-meßbar ist.

(b) **(2 Punkte)** Man nennt eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine *Lebesguesche Nullmenge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Intervalle $I_k \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le \varepsilon.$$

Zeige: Die Menge M aus Teilaufgabe **(a)** ist eine Lebesguesche Nullmenge.

(c) **(2 Punkte)** Zeige: Jede beschränkte Teilmenge einer achsenparallelen Hyperebene ist eine Jordan-Nullmenge.

Aufgabe 3. **(3 Punkte)** Zeige: Jede offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist Jordan-meßbar.

Hinweis: Verwende **Bsp. 7.2.5** aus dem Skript.

Aufgabe 4.

(a) **(3 Punkte)** Berechne das Volumen von

$$M := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq z \leq x+y \;\; x \in [0,1],\; y \in [0,2] \right\}$$

.

(b) **(3 Punkte)** Berechne das Volumen des Ellipsoids

$$E = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \qquad \text{mit } a,b,c > 0 \text{ fest.}$$

(c) **(3 Punkte)** Berechne den Inhalt der n-dimensionalen Kugel $K(x_0, r)$ für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$.

Hinweis: Zeige mittels Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $|K(x_0,r)| = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} r^n$ und verwende dabei die Formel $\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sqrt{\pi}$, sowie $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ und die Funktionalgleichung: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$.