Aufgabe 4(c) Sei $X = \mathbb{R}$. Zeige: 1.) Jedes offene Intervall ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. und 2.) jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen offenen Intervallen.

Beweis:

1. Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in (a, b)$:
$$K(x, \min\{x - a, b - x\} \subset (a, b)\,,$$
und $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\} > 0$. Also ist jedes $x \in (a, b)$ innerer Punkt und somit (a, b) offen.

2. Wir zeigen $O = \bigcup\limits_{(a,b)\subset O: a,b\in\mathbb{Q}} (a, b)$. Es gilt:

   (i) $\bigcup\limits_{(a,b)\subset O: a,b\in\mathbb{Q}} (a, b) \subset O$: Da O ist offen und somit
   $$O = \mathring{O} = \bigcup_{\widetilde{O}\subset O: \widetilde{O} \text{ offen}} \widetilde{O} \supset \bigcup_{(a,b)\subset O: a,b\in\mathbb{Q}} (a, b)\,,$$
   wobei wir benutzt haben, dass (a, b) offen ist.

   (ii) $O \subset \bigcup_{(a,b)\subset O: a,b\in\mathbb{Q}}(a, b)$: Sei $x \in O$, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = K(x, \varepsilon) \subset O$, da O offen ist. Wähle also $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \in (x - \varepsilon, x)$ und $b \in (x, x + \varepsilon)$ (a, b existieren nach Prop. 2.3.7 aus Analysis I). Also gilt $x \in (a, b) \subset K(x, \varepsilon) \subset O$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, d.h. insbesondere $x \in \bigcup\limits_{(a,b)\subset O: a,b\in\mathbb{Q}} (a, b)$ und somit $O \subset \bigcup\limits_{(a,b)\subset O: a,b\in\mathbb{Q}} (a, b)$.

   Aus (i) und (ii) folgt $O = \bigcup\limits_{(a,b)\subset O: a,b\in\mathbb{Q}} (a, b)$ und somit die Behauptung, denn $\mathbb{Q}$ ist abzählbar und somit ist die linke Seite eine höchstens abzählbare Vereinigung offener Intervalle.