Universität Ulm

Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften

Übungen zur Analysis II

Werner Balser
Daniel Hauer
SS 2009

Übungsblatt 1

Abgabetermin: Donnerstag, den 07. Mai 2009, vor der Vorlesung um 12.00 Uhr

Das Übungsblatt und weitere aktuelle Informationen zur Veranstaltung *Analysis II* gibt es im Internet auf der Seite:

`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html`.

Aufgabe 1. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Halbnorm* auf X, wenn folgendes gilt:

(N2) $\forall x \in X\,,\ \alpha \in \mathbb{K}: \qquad p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$

(N3) $\forall x, y \in X: \qquad p(x+y) \le p(x) + p(y)$

(a) **(2+2+2 Punkte)** Zeige, daß für jede Halbnorm p auf X gilt:

(i) $p(0) = 0$ **(ii)** $|p(x) - p(y)| \le p(x-y) \quad \forall x, y \in X$

(iii) $p(x) \ge 0 \quad \forall x \in X$

(b) **(3 Punkte)** Zeige: Auf X wird durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow p(x-y) = 0$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

(c) **(2 Punkte)** Zeige: Jede Norm auf X ist eine Halbnorm.

Aufgabe 2. **(3 Punkte)** Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X mit der Eigenschaft: Es gibt ein $C > 0$, so daß für alle $x \in X$: $\|x\|_2 \le C\|x\|_1$.
Zeige: Zu jedem $r > 0$ existiert ein $\tilde{r} > 0$, so daß für jedes $x, y \in X$,

$$\|x-y\|_1 < r \Longrightarrow \|x-y\|_2 < \tilde{r}.$$

Aufgabe 3. Es bezeichnet $C[a,b]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$, $R[a,b]$ die Menge aller auf $[a,b]$ Riemmann-integrierbaren Funktionen, sowie für $1 \le p < \infty$, $\|\cdot\|_p$ die *p-Norm* und $\|\cdot\|_\infty$ die *Supremumsnorm*, die jeweils definiert sind wie in **Beispiel 1.3.7**.

(a) **(3+3 Punkte)** Finde eine Funktionenfolge (f_n) in $C[a,b]$, für die gilt

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 0 \quad \forall p \in [1,\infty)$$

und schließe daraus, daß die p-Norm und die Supremumsnorm auf $C[a,b]$ nicht äquivalent sind.

(b) (3 Zusatzpunkte) Zeige: Auf $R[a, b]$ ist $\|\cdot\|_p$, $(1 \leq p < \infty)$, eine Halbnorm, nicht aber eine Norm.

Aufgabe 4. (3+5 Punkte) Zeichne ein Schaubild der Menge

$$O = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (0, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-5, 13] \right\}$$

und finde zu jedem $(x, y)^T \in O$ ein $r > 0$ so, daß $K\left((x, y)^T, r\right) \subset O$ ist.