UNIVERSITÄT ULM

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Werner Balser
Daniel Hauer
SS 2009

Übungen zur Analysis II

Probeklausur

Die Klausur ist auf 120 Minuten angesetzt. Es dürfen bis auf 2 Din A4 Seiten (handgeschrieben, keine Kopien) keine weiteren Hilfsmittel (wie Taschenrechner, Formelsammlung, Skript oder Bücher) verwendet werden. Max. erreichbare Punkte: 63 Punkte.

Abgabetermin: Donnerstag, den 23. Juli 2009, vor der Vorlesung im H3 um 12.00 Uhr.

Bitte beachtet: Die Abgabe dieser Probeklausur ist freiwillig. Ihr dürft 3 Aufgaben zur Korrektur abgeben. Die dabei erreichten Punkte dienen Euch als Bonuspunkte.

Das Übungsblatt und weitere Informationen zu *Analysis II* gibt es im Internet auf:

`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html`

Aufgabe 1. (3+4+4+2 Punkte) Gib ohne Beweis an, ob die Mengen in dem jeweils angegebenen normierten Vektorraum offen bzw. abgeschlossen bzw. zusammenhängend sind, und gib jeweils das Innere, die abgeschlossene Hülle und den Rand der Mengen an. Entscheide mit Beweis, ob die Mengen sogar kompakt sind.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 > 2\}$ **(b)** $B = A \cup \left\{\left(\frac{1}{k}, 0, \ldots, 0\right)^T \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $C = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le e^x,\ -1 \le x \le 1\right\}$ **(d)** $D = \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei X ein normierter Raum. Für eine nichtleere Menge $A \subset X$ sei der Abstand eines Punktes $x \in X$ von A definiert durch $d(x,A) := \inf\limits_{z \in A} \|x - z\|$.

Zeige, dass für $x \in X$ gilt: $d(x,A) = 0$ genau dann, wenn $x \in \overline{A}$ ist.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Überprüfe, ob die angegebenen Folgen konvergieren und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $\left(\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}, \frac{1}{\log(m+1)}, \frac{17}{2^m}\right)^T\right)_{m\ge1} \subset \mathbb{R}^3$ **(b)** $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k^3}, \frac{m+1}{\sqrt{m+1}}\right)^T\right)_{m\ge1} \subset \mathbb{R}^2$

Aufgabe 4. (6 Punkte) Beweise, dass die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x = y = 0, \\ \dfrac{|x|\,y}{|x| + y^2} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ im Nullpunkt stetig und in jede Richtung differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

Aufgabe 5. (5 Punkte) Berechne die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = \frac{1}{z}\arctan(x\,y^2)$ im Punkte $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)^T$ in Richtung $\frac{1}{4}\left(1, -3, \sqrt{6}\right)^T$.

Aufgabe 6. (5 Punkte) Zeige, dass die durch $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in jedem Punkt $(x,y)^T \neq (0,0)^T$ lokal umkehrbar ist und berechne für die lokale Umkehrfunktion ihre Ableitung. Entscheide, ob f auf ganz $\mathbb{R}^2$ umkehrbar ist.

Aufgabe 7. (5 Punkte) Finde alle lokalen Maxima und Minima von

$$f(x,y) = x(y-2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \qquad \text{für } y > 0.$$

Aufgabe 8. (5 Punkte) Berechne Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x,y,z) = x + y - z$$

unter der Nebenbedingung $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$.

Aufgabe 9. (5 Punkte) Sei $M = \Big\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x_1,x_2,x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \leq x_3 \leq 1\Big\}$, und sei $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf M. Schreibe das Integral $\displaystyle\int_M h(x)dx$ als iteriertes Integral der Form

$$\int_a^b \left(\int_{c(x_3)}^{d(x_3)} \left(\int_{e(x_2,x_3)}^{f(x_2,x_3)} h(x_1,x_2,x_3)dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 \,.$$

Aufgabe 10. (3+2 Punkte) Berechne folgende Integrale, falls existent:

(a) $\displaystyle\int_M y\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, wobei $M = \big\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0, y \geq 0\big\}$

(b) $\displaystyle\int_\gamma f^T(x)\, dx$, wobei γ die Parametrisierung $x(t) := (t,t^2)^T$, $-1 \leq t \leq 1$, hat und $f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 11. (5 Punkte) Entscheide, ob für die Funktion

$$f(x,y) = (xy^2 + ye^x, x^2y + e^x)^T$$

das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma f^T(x,y)d(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ wegunabhängig ist, und berechne gegebenenfalls eine Stammfunktion von f in $\mathbb{R}^2$.