Universität Ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Übungen zur Analysis II

Werner Balser
Daniel Hauer
SS 2009

Übungsblatt 3

Abgabetermin: Freitag, den 22. Mai 2009, vor der Vorlesung im H22 um 8.00 Uhr.

Das Übungsblatt und weitere aktuelle Informationen zur Veranstaltung *Analysis II* gibt es im Internet auf der Seite:

`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html`.

Aufgabe 1. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvexes Funktional* auf X, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Für ein allgemeine Funktion φ auf X heißt die Menge

$$\operatorname{epi}(\varphi) = \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \lambda\}$$

der *Epigraph* von φ.

(a) (4 Punkte) Zeige: Genau dann ist ein Funktional φ auf X konvex, wenn sein Epigraph $\operatorname{epi}(\varphi)$ eine nichtleere und konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$ ist.

(b) (2 Punkte) Zeige, daß jede Norm auf einem Vektorraum über $\mathbb{K}$ ein konvexes Funktional auf X ist.

(c) (2 Punkte) Zeichne den Epigraphen vom Funktional $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ in ein Schaubild.

Aufgabe 2. (3+2 Punkte) Es sei B eine zusammenhängende Teilmenge eines normierten Raumes X, und es sei $B \subset C \subset \overline{B}$. Zeige: Dann ist auch C zusammenhängend und schließe daraus, dass $\overline{B}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 3. Für $(x_0, y_0)^T, (x_1, y_1)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_0, y_0)^T \neq (x_1, y_1)^T$ sei

$$g = \left\{ (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x(t), y(t))^T = t(x_0, y_0)^T + (1-t)(x_1, y_1)^T \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \right\}$$

die durch $(x_0, y_0)^T$ und $(x_1, y_1)^T$ verlaufende Gerade. In einem beliebig normierten Raum X bezeichnet die Menge

$$S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$

die Einheits-*Sphäre* in X. Es sei jetzt $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Norm.

(a) (4 Zusatzpunkte) Zeige: Es existieren zwei nichtleere, offene und polygonzusammenhängende Teilmengen $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}^2$, so dass $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $\mathbb{R}^2 \backslash g = O_1 \cup O_2$ ist.

HINWEIS: Vergleiche den Beweis von Lemma 2.6.5.

(b) (2 Punkte) Sei $(x_0, y_0)^T \in S$ fest. Untersuche, ob $S \backslash \{(x_0, y_0)^T\}$ zusammenhängend ist. Begründe Deine Aussage mit einem kleinen Beweis.

(c) (2 Punkte) Seien $(x_0, y_0)^T, (x_1, y_1)^T \in S$ fest und verschieden. Zeige unter Verwendung von Teilaufgabe (a), dass

$$S \backslash \{(x_0, y_0)^T, (x_1, y_1)^T\}$$

unzusammenhängend ist.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Sei X ein normierter Raum. Zeige: Wenn eine Cauchy-Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt, so ist sie selber konvergent.

Aufgabe 5. (3 Punkte) Sei X ein normierter Raum und $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Zeige, dass die Strecke $\overline{ab} := \{at + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$ folgenkompakt ist, und schließe daraus, dass $\overline{ab}$ kompakt und total-beschränkt ist.