Universität Ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Werner Balser
Daniel Hauer
SS 2009

Übungen zur Analysis II

Übungsblatt 5

Abgabetermin: Freitag, den 12. Juni 2009, vor der Vorlesung im H22 um 8.00 Uhr.

Während der sog. *Reading Week* von Montag, den 01. Juni bis Freitag, den 05. Juni 2009 finden keine Vorlesungen, keine Übungen und keine Tutorien zur Veranstaltung Analyis II statt.

Das Übungsblatt und weitere aktuelle Informationen zur Veranstaltung *Analysis II* gibt es im Internet auf der Seite:

`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html`.

Aufgabe 1. Es sei X ein normierter Raum. Für $a_n \in X$ heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty$.

(a) **(3 Zusatzpunkte)** Zeige: Falls X ein Banachraum ist, dann ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent in X.

(b) **(2 Zusatzpunkte)** Zeige, dass auch die Umkehrung von Teilaufgabe **(a)** gilt. Mit anderen Worten: Falls jede absolut konvergente Reihe auch in X konvergiert, dann ist X vollständig.

Aufgabe 2. Für $a_n \in X$ eines normierten Raumes X nennt man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine *Cauchy-Reihe* in X, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+, \text{ so dass } \forall\, m, p \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq N \Longrightarrow \left\| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right\| < \varepsilon.$$

(a) **(2 Zusatzpunkte)** Zeige: Jede konvergente Reihe in X ist eine Cauchy-Reihe in X.

(b) **(4 Zusatzpunkte)** Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert sei, und $(e_k)_{k=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem[1] von X. Zeige, dass für $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k \text{ ist eine Cauchy-Reihe in } X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$$

[1] $(e_k)_{k=0}^{\infty} \subset X$ heißt Orthonormalsystem von X, falls $\forall\, k, j \in \mathbb{N}_0 : \langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X bezeichnet.

Aufgabe 3.

(a) (4 Punkte) Sei X ein normierter Raum. Zeige: Eine Teilmenge $M \subset X$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung $f : M \longrightarrow \{0,1\}$ gibt.

(b) (3 Punkte) Sei $B = \left\{ \big(x, \sin(1/x)\big)^T \,\middle|\, x \in (0,1] \right\} \cup \big\{(0,0)^T\big\} \subset \mathbb{R}^2$. Untersuche, ob B zusammenhängend ist und begründe Deine Behauptung mit einem kleinen Beweis.

Aufgabe 4.

(a) (2 Punkte) Es sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, $g_k(x,y) = \dfrac{x^k + y}{k^2}$. Finde möglichst große Bereiche $D \subset \mathbb{R}^2$, auf denen die Funktionenreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ gleichmäßig konvergiert, und untersuche dort die Stetigkeit der Grenzfunktion.

(b) (4 Punkte) Leite mit Hilfe des *Satzes von Dini* (siehe Satz **4.4.5** im Skript) die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge $(f_k)_{k\geq 1}$, mit $f_k(x) = x^k(1-x)$ für $x \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ ab.

Aufgabe 5. (2+2+2 Punkte) Untersuche folgende Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} \sinh x \\ \cosh x \end{pmatrix}$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(x,y)^T \mapsto g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{für } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(x,y)^T \mapsto h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{für } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$$

Aufgabe 6.

(a) (2 Punkte) Berechne die Richtungsableitung von $f(x,y) = \sin(x+y)$ im Punkt $(1,1)^T \in \mathbb{R}^2$ in Richung der Gerade $\big\{(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}})^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \in \mathbb{R}\big\}$.

(b) (4 Punkte) Berechne den Gradienten von $g(x,y,z) = \log(1 + x^2 + y^4)$