Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 3

1. Betrachtet wird das Virenmodell (vgl. Vorlesung)

$$\begin{cases} \dot{V} &= kI - \nu V, \\ \dot{Z} &= \lambda - mZ - rVZ, \\ \dot{I} &= rVZ - \mu I, \end{cases} \tag{A}$$

mit positiven Konstanten k, ν, λ, m, r, $\mu > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass (A) mittels des Skalierung

$$x(t) := \frac{r}{\mu} V\left(\frac{t}{\mu}\right), \quad y(t) := \frac{kr}{\mu^2} Z\left(\frac{t}{\mu}\right), \quad z(t) := \frac{kr}{\mu^2} I\left(\frac{t}{\mu}\right),$$

auf das (normalisierte) System

$$\begin{cases} \dot{x} = z - \xi x, \\ \dot{y} = \sigma - \varrho y - xy, \\ \dot{z} = xy - z, \end{cases} \tag{B}$$

transformiert werden kann, wobei die positiven Parameter durch

$$\xi = \frac{\nu}{\mu}, \quad \sigma = \frac{kr\lambda}{\mu^3} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{m}{\mu}$$

gegeben sind. (2)

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige Anfangswerte x_0, y_0, $z_0 \geq 0$ das Anfangswertproblem (B) eine eindeutige Lösung für alle $t \geq 0$ besitzt, welche nach rechts global beschränkt ist und nur Werte in $\mathbb{R}^3_+$ annimmt. (2)

(c) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von den Parametern) alle Equilibria von (B), welche in der biologisch relevanten Menge $\mathbb{R}^3_+$ liegen. (2)

2. Gegeben ist das lineare System

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter α die Stabilitätseigenschaften des Equilibriums $x_* = (0,0)^T$. (4)