Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 04.12.2014

Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 7

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist D (positiv) invariant und $\overline{D} \subset G$, so ist auch $\overline{D}$ (positiv) invariant. (2)

(b) Es seien $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ und $\mathrm{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz und quasipositiv. Zeigen Sie, dass für

$$\dot{u} = f(u) - (f(u)|\mathrm{e})u,$$

die Menge S_n positiv invariant ist. (2)

2. *Modell der mathematischen Genetik.* Betrachtet wird eine Population von diploiden Organismen, die sich geschlechtlich gemäß der Mendelschen Gesetze fortpflanzen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Mit $i = 1, \dots, n$ wird eine (haploide) Chromosonenbesetzung mit Genen bezeichnet. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnet x_{ij} die Anzahl der Zygoten, die den i-ten und j-ten Satz im Zellkern tragen und x_i die Anzahl der Gamente mit Satz i. Mit p_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, wird die Häufigkeit bezeichnet, mit welcher der Chromosomensatz i in den Zellen vorhanden ist; es sei $p = (p_1, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Die symmetische Matrix $(f_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnet die Fitness der (i, j)-Zygoten. Es sei Φ_i die Fitness der Gamente mit Satz i und Φ die mittlere Fitness, definiert als

$$\Phi_i(p) = \sum_{j=1}^n f_{ij} p_j, \quad \text{und} \quad \Phi(p) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} p_i p_j = \sum_{i=1}^n \Phi_i(p) p_i.$$

Betrachtet wird das System

$$\dot{p_i} = p_i(\Phi_i(p) - \Phi(p)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{A}$$

Ferner seien $\mathrm{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ und $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : (\mathrm{e}|x) = 1\}$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden Vektor $p_0 \in S_n$ besitzt das System (A) genau eine Lösung $p(t)$ mit $p(0) = p_0$. Diese Lösung existiert auf $\mathbb{R}_+$ und es gilt $p(t) \in S_n$ für alle $t \geq 0$. (2)

(b) Für jede Lösung $p(t)$ von (A) mit $p(0) \in S_n$ ist die mittlere Fitness $\Phi(p(t))$ für $t \geq 0$ monoton wachsend.
Insbesondere gilt $\dot{\Phi}(p) = 0$ genau dann, wenn p ein Equilibrium ist. (2)

Es sei nun $n = 2$.

(c) Bestimmen Sie alle Equilibria und diskutieren Sie das asymptotische Verhalten der Lösungen zu $p(0) \in (0, \infty)^2 \cap S_2$ im Falle

(i) $f_{11} < f_{12} < f_{22}$,

(ii) $f_{11}, f_{22} < f_{12}$.

(2)