Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 10

Methode von Lojasiewicz für Gradientensysteme
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \in C^2(G, \mathbb{R})$. Wir betrachten das Gradientensystem

$$\dot{u} + \nabla V(u) = 0. \tag{A}$$

Lojasiewicz-Ungleichung:
Sei $V : G \to \mathbb{R}$ aus C^1. Wir sagen, dass für V die *Lojasiewicz-Ungleichung* gilt, wenn es zu jedem kritischen Punkt $a \in G$ von V, d. h. es gilt $\nabla V(a) = 0$, Konstanten $\Theta_a \in (0, \frac{1}{2}]$, $m_a > 0$ und $\delta_a > 0$ gibt, derart, dass

$$m_a |V(x) - V(a)|^{1-\Theta_a} \leq |\nabla V(x)|_2, \qquad \text{für alle } x \in B_{\delta_a}(a) \subset G, \tag{L}$$

erfüllt ist.

Satz:
Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \in C^2(G, \mathbb{R})$ und $\mathcal{E} = \{x \in G : \nabla V(x) = 0\}$ die Menge der kritischen Punkte von V bzw. die Equilibriumsmenge von (A). Ferner gelte für V die *Lojasiewicz-Ungleichung* (L). Dann konvergiert jede globale beschränkte Lösung $u(t)$ mit $\overline{u(\mathbb{R}_+)} \subset G$ für $t \to \infty$ gegen ein Equilibrium.

Bemerkungen:
Es ist bekannt, dass für V die Lojasiewicz-Ungleichung (L) gilt, wenn V in G reell analytisch ist. Beachten Sie, dass im Unterschied zu den bisherigen Sätzen aus der Vorlesung hier nicht gefordert wird, dass die Menge der Equilibria $\mathcal{E}$ diskret ist!

1. Beweisen Sie den obigen Satz und gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von $\omega(u) \subset \mathcal{E}$ gibt, so dass für alle $x \in U$ die Lojasiewicz-Ungleichung für V gleichmäßig erfüllt ist. D. h. es gibt Konstanten $\Theta \in (0, \frac{1}{2}]$ und $m > 0$ so, dass für alle $a \in \omega(u)$ und alle $x \in U$ gilt:

$$m|V(x) - V(a)|^{1-\Theta} \leq |\nabla V(x)|_2$$

Hinweis: Beachten Sie, dass die Mengen $\omega(u)$ kompakt und V auf $\omega(u)$ konstant ist. Verwenden Sie eine geeignete Überdeckung der Menge $\omega(u)$. (1)

(b) Sei nun $\xi \in \omega(u)$ und nehmen Sie an, dass $u(t)$ keine stationäre Lösung von (A) ist. Zeigen Sie, dass gilt:
$W(t) := V(u(t)) - V(\xi) > 0$ für alle $t \geq 0$ und W ist streng monoton fallend. (2)

(c) Verwendem Sie nun (a), um die zeitliche Änderung von $\Psi(t) := W(t)^\Theta$ für $t \geq T$ (mit T>0 hinreichend groß) geeignet abzuschätzen, um dann $\int_T^\infty \|\dot{u}(t)\| dt < \infty$ zu zeigen. (2)

(d) Folgern Sie mit Hilfe von (c) die Konvergenz von $u(t)$ gegen ξ für $t \to \infty$. (1)

2. Sei $a > 0$ und $V : (-a, a) \to \mathbb{R}$ reell analytisch mit $V(0) = V'(0) = 0$. Zeigen Sie, dass für V die Lojasiewicz-Ungleichung in einer Umgebung von $x = 0$ gilt und dabei $\Theta = \frac{1}{m}$ mit $m = \min\{k \in \mathbb{N} : V^{(k)}(0) \neq 0\}$ gewählt werden kann. (2)

3. *Konkretes Beispiel:* Wir betrachten

$$\begin{cases} \dot{x} + 2x(x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ \dot{y} + 2y(x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie für beliebige Anfangswerte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ die Konvergenz der zugehörigen Lösung für $t \to \infty$. (2)