Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester
2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 12

1. Betrachtet wird das folgende Räuber-Beute-Modell vom Holling-Typ II (x ist die Beute und y ist der Räuber):

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{mx}{a+x} y, \\ \dot{y} = \left(\frac{mx}{x+a} - d\right) y. \end{cases}$$

Dabei sind a, d, m, K, γ positive Konstanten.
Es gelte $K\left(\frac{m}{d} - 1\right) > a$.

(a) Zeigen Sie, dass alle in $[0, \infty)^2$ startenden Lösungen global nach rechts beschränkt sind und die Menge $[0, \infty)^2$ nicht verlassen (für $t \geq 0$). (2)

(b) Bestimmen Sie alle Equilibria in $[0, \infty)^2$.
(Es gibt genau ein Equilibrium $(x_*, y_*) \in (0, \infty)^2$). (1)

(c) Zeigen Sie: Das Equilibrium (x_*, y_*) ist asymptotisch stabil, falls $K - a < 2x_*$; und (x_*, y_*) ist abstoßend im Fall $K - a > 2x_*$.
(Zusatzbemerkung: Mit Hilfe einer geeigneten Ljapunov-Funktion kann man ferner zeigen, dass (x_*, y_*) im Fall $K - a < 2x_*$ in $(0, \infty)^2$ global asymptotisch stabil ist.) (2)

(d) Beweisen Sie, dass das System im Fall $K - a > 2x_*$ eine nichttriviale periodische Lösung besitzt. (2)

(e) Wie kann man den nichtlinearen Wechselwirkungsterm biologisch interpretieren? (1)

(f) Welche Bedeutung hat die Bedingung $K\left(\frac{m}{d} - 1\right) > a$?
Wie verhalten sich die Lösungen in $[0, \infty)^2$ im Fall von $K\left(\frac{m}{d} - 1\right) < a$? (2)