Übungen Dynamische Systeme : Serie 13

1. Die Gleichung

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

heißt *van-der-Pol-Gleichung.*
Zeigen Sie, dass die Gleichung für $\mu > 0$ genau einen periodischen Orbit besitzt.

Hinweise:
Es ist zweckmäßig, $F(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$ und $y = \dot{x} + F(x)$ zu setzen.
Dies führt auf das äquivalente System

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Man zeige dann, dass der Punkt $(0,0)$ abstoßend und jede Lösung global nach rechts beschränkt ist. Um Letzteres zu beweisen, ist es hilfreich, die im Punkt $(0, y_0)$ (mit $y_0 > 0$ hinreichend groß) startenden Lösungen zu betrachten und zu zeigen, dass diese die y-Achse nach endlicher positiver Zeit in einem Punkt $(0, y_1)$ trifft, wobei $|y_1| < y_0$ gilt. (7)

2. Zeigen Sie, dass das ebene System

$$\dot{x} = x - xy^2 + y^3,$$
$$\dot{y} = 3y - yx^2 + x^3,$$

keinen echten periodischen Orbit in der Kugel $B_2(0)$ besitzt. (3)