Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 12.02.2015

Prof. Dr. R. Zacher
Marie-Luise Hein
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 10

Übungen Dynamische Systeme : Serie 15

1. Betrachtet wird das Lorenz-System:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

in $G = \mathbb{R}^3$, wobei $\sigma, r, b > 0$ Parameter sind.

(a) Bestimmen Sie alle Equilibria dieses Systems. (1)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der linearisierten Stabilität, dass der Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ im Fall $r < 1$ asymptotisch stabil und für $r > 1$ instabil ist. (2)

(c) Es sei $r < 1$. Zeigen Sie, dass mit

$$V(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

eine strikte Ljapunov-Funktion für das System gegeben ist. (2)

(d) Weisen Sie nach, dass $0 \in \mathbb{R}^3$ im Fall $r < 1$ global attraktiv ist, d. h. jede Lösung des Systems konvergiert für $t \to \infty$ gegen 0. (2)

(e) Es sei $\sigma > b + 1$ und $1 < r < r_H$ mit

$$r_H = \frac{(b + \sigma + 3)\sigma}{\sigma - b - 1}.$$

Zeigen Sie, dass alle Equilibria außer $0 \in \mathbb{R}^3$ asymptotisch stabil sind. (3)