



UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Dienstag, 07.06.2016

Dr. G. Baur Marie-Luise Hein Sommersemester 2016 Punktzahl: 30

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Serie 1

1. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z = 5 + 7i$ und $w = 11 - 9i$. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie Real- und Imaginärteil, sowie Betrag und Argument der Ergebnisse an: (10)

$$z - w, \bar{w}, \overline{w - z}, \bar{w}z, \frac{1}{w}, \frac{w}{z}, z^{11}, \sqrt[5]{316 + 12i}.$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und z_0, \dots, z_{n-1} die n -ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie (3)

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0.$$

3. Bestimmen Sie alle Nullstellen der komplexen Kosinus-Funktion, d. h. alle $z \in \mathbb{C}$ mit (3)

$$\cos z = 0.$$

4. Für $w \in \mathbb{C}$ mit $w + |w| \neq 0$ definieren wir (4)

$$z = \sqrt{|w|} \frac{w + |w|}{|w + |w||}.$$

Zeigen Sie, dass $z^2 = w$ gilt, d. h. z ist die Quadratwurzel von w .
Zusatz: Für welche $w \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung $w + |w| = 0$?

5. Beweisen Sie: Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt die Gleichung (4)

$$e^{1/z} = w$$

in jedem Kreis um den Nullpunkt beliebig viele Lösungen.

6. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ beliebig. Betrachte die Abbildung $w = f(z) = z^2 = u(x, y) + iv(x, y)$. (6)
Welche Kurven in der z -Ebene werden in der w -Ebene auf $u \equiv \text{const.}$ bzw. $v \equiv \text{const.}$ abgebildet? Geben Sie zusätzlich eine Skizze der Sachverhalte in der w -Ebene und in der z -Ebene an.