Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 14.06.2016

Dr. G. Baur
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2016
Punktzahl: 30

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Serie 2

1. Wir betrachten in dieser Aufgabe den Hauptwert $Log\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ des komplexen Logarithmus.

(a) Wie müssen zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gewählt werden, damit folgende Gleichung gilt: (3)

$$Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2).$$

(b) Welche der Potenzen $a^{3b}, (a^3)^b, (a^b)^3$ stimmen für beliebige komplexe Zahlen $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$ stets überein? (2)

(c) Berechnen Sie i^{3i}. (1)

2. (a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offenes, achsenparalleles Rechteck. Sei u harmonisch in D. Fixiere $(x_0, y_0) \in D$ und definiere für beliebige $(x, y) \in D$ die Funktion $v\colon D \to \mathbb{R}$ via (3)

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} u_y(t; y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} u_x(x; t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass $u + iv$ in D die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt.

Sei $u(x, y) := x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2$.

(b) Zeigen Sie: u ist harmonisch in ganz $\mathbb{R}^2$. (2)

(c) Konstruieren Sie, falls möglich, $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $u + iv$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist. (2)

3. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\tilde{D} = \{\bar{z}\colon z \in D\}$. Zeigen Sie, dass die durch $g := \overline{f(\bar{z})}$ gegebene Funktion $g\colon \tilde{D} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und bestimmen Sie ihre Ableitung. (3)

4. In welchen Punkten erfüllen die folgende Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen und in welchen Punkten sind sie holomorph? (8)

(a) $D = \mathbb{C}, f(x + iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$,

(b) $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}, f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$,

(c) $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}, f(x + iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$,

(d) $D = \mathbb{C}, f(z) = z^2 \operatorname{Re} z$.

5. (a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos z \in \mathbb{R}$. (2)

(b) Bestimmen Sie (maximale) Mengen $A, B \subset \mathbb{C}$ derart, dass $[0, \pi] \subset A$ und $\cos\colon A \to B$ bijektiv ist. (2)

(c) Stellen Sie die jetzt gesicherte Umkehrfunktion $\operatorname{arccos}\colon B \to A$ mit Hilfe eines komplexen Logarithmus dar. (2)