DIE ÜBUNGSBLÄTTER SIND IN ZWEIERGRUPPEN ZU BEARBEITEN UND **VOR BEGINN** DER ÜBUNG ABZUGEBEN!

UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 27.04.2017

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2017
Punktzahl: 30

Übungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Serie 1

1. Bestimmen Sie

(a) eine Lösung von $e^y y' - t - t^3 = 0$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$; (3)

(b) eine Lösung $u\colon I \to \mathbb{R}$ von $yy' + (1 + y^2)\sin t = 0$ für $t \in I$ mit $y(0) = 1$; dabei ist I ein offenes Intervall mit $0 \in I$, welches maximal gewählt werden soll; (4)

(c) eine stetige Lösung von $y'(t) + y(t) = g(t)$ für $t \geq 0$ mit $y(0) = 0$ und

$$g(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1; \end{cases}$$

(3)

(d) eine Lösung $x\colon J \to \mathbb{R}$ von $x' = x/t + t/x$ für $t \in J$ mit $x(1) = -2$; dabei ist J ein offenes Intervall mit $1 \in J$, welches maximal gewählt werden soll. (4)

2. Man beweise, dass jede Lösung der Gleichung $y' + ay = b\mathrm{e}^{-ct}$ für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert, wobei a und c positive Konstanten sind und b eine beliebige reelle Zahl ist. (4)

3. Überführen Sie die Differentialgleichung $x^3 y'' = xy' + y''' - y^2$ in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung. (2)

4. Toxine in einem Medium zerstören einen Bakterienstamm mit einer Rate, die proportional zu dem Produkt von der Bakterienanzahl und der Toxinmenge ist. Die Proportionalitätskonstante werde mit $a > 0$ bezeichnet. Wären keine Toxine vorhanden, so erfolgt die Ausbreitung der Bakterien mit einer Rate, die proportional zur Menge der Bakterien ist. Die Proportionalitätskonstante wird $b > 0$ genannt. Man nehme an, dass die Änderung der Toxinmenge mit einer konstante Rate $c > 0$ erfolgt und dass die Produktion der Toxine zur Zeit $t = 0$ beginnt. Die Anzahl der lebenden Bakterien zur Zeit t wird mit $y(t)$ bezeichnet.

(a) Man finde eine Differentialgleichung erster Ordnung, die von $y(t)$ erfüllt wird. (2)

(b) Man löse diese Differentialgleichung für $y(t)$ mit $y(0) = y_0 > 0$. (2)

(c) Man zeige, dass die Bakterienpopulation bis zum Zeitpunkt $t_* = \frac{b}{ca}$ wächst und danach abnimmt. (2)

(d) Wie verhält sich $y(t)$ für $t \to \infty$? (2)

(e) Wie lange dauert es, bis die Bakterienpopulations auf die Hälfte ihres Anfangsbestandes geschrumpft ist? (2)