UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 24.05.2017

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2017
Punktzahl: 30

Übungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Serie 5

1. Berechnen Sie e^{At} für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und geben Sie damit die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = x_2, & x_2(0) = -2, \end{cases}$$

an. (6)

2. Überführen Sie die Differentialgleichung $y'''(t) - y''(t) - y'(t) + y(t) = 0$ in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung (Matrix-Vektor-Schreibweise). Zeigen Sie, dass $(e^t, e^t, e^t)^T$, $(te^t, (1+t)e^t, (2+t)e^t)^T$ und $(e^{-t}, -e^{-t}, e^{-t})^T$ ein Fundamentalsystem für das System erster Ordnung bildet. Bestimmen Sie die Hauptfundamentalmatrix für $t_0 = 0$. (6)

3. Berechnen Sie für die linearen Systeme $u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u(t)$ ein reelles Fundamentalsystem. (6)

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + y_3 + x^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3 + x^2, \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 + x^2. \end{cases}$$

Hinweis: Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix sind $v_1 = (2, 1, 1)^T$, $v_2 = (-1, 1, 1)^T$ und $v_3 = (0, -1, 1)^T$. (6)

5. Gegeben seien drei Fässer F_1, F_2, F_3 mit jeweils 100 Liter Wasser. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei in Fass F_1 1 kg Salz gelöst, während die Fässer F_2 und F_3 reines Wasser enthalten. Mit einer konstanten Rate von 1 Liter pro Minute wird nun Wasser von Fass F_1 nach Fass F_2, von Fass F_2 nach Fass F_3 und von Fass F_3 nach Fass F_1 zurück gepumpt, so dass ein geschlossener Kreislauf entsteht. Es wird vorausgesetzt, dass in jedem Fass stets eine homogene Mischung vorliegt.
Man ermittle, wie viel Salz sich zur Zeit $t > 0$ in jedem der drei Fässer befindet. (6)