Die Übungsblätter sind in Zweiergruppen zu bearbeiten und **vor Beginn** der Übung abzugeben!

Bitte meldet euch für die **Vorleistung** an!

Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 01.06.2017

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2017
Punktzahl: 30

Übungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Serie 6

1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Man überprüfe, dass $v_1 = (-1,1,1)^T$ ein Eigenvektor von A ist. (1)

(b) Zeigen Sie, dass $v_2 = (1,0,0)^T$ bzw. $v_3 = (1,-1,0)^T$ Hauptvektoren 2. bzw. 3. Stufe von A sind. (2)

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $x' = Ax$. (2)

2. Das lineare homogene System

$$x' = \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ t+1 & -t \end{pmatrix} x,$$

hat eine Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ mit $x_1 = x_2$. Bestimmen Sie diese Lösung $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Berechnen Sie dann mittels des Ansatzes (d'Alembert-Reduktion für Systeme) $x(t) = (0, z(t))^T + (x_1(t), x_2(t))^T \varphi(t)$ mit den skalaren Funktionen z und φ ein Fundamentalsystem und geben Sie die Hauptfundamentalmatrix an. (5)

3. Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung $y'' - (3/x)y' + (4/x^2)y = 0$. (2)

(a) Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung der Form $y_1(x) = ax^2 + bx + c$.

(b) Bestimmen Sie mittels der d'Alembert-Reduktion ein Fundamentalsystem für diese Differentialgleichung, welches y_1 enthält. (3)

4. Berechnen Sie für die linearen Systeme der Form $x'(t) = Ax(t)$ mit den konstanten Koeffizientenmatrizen

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

jeweils ein reelles Fundamentalsystem. (5+5)

5. Bestimmen Sie die (reelle) allgemeine Lösung der Differentialgleichung

(a) $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t}$, (2)

(b) $x^{(5)} + 8x^{(3)} + 16x' = 0$. (3)