Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 26.04.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 1

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.

1. Sei X ein Banachraum und $\mathscr{L}(X)$ der Raum aller beschränkten linearen Operatoren auf X versehen mit der Operatornorm. Eine stetige Abbildung $T\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ mit (4)

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$,

(ii) $T(0) = \mathrm{Id}$

heißt *normstetige Halbgruppe*. Zeige, dass für jedes $A \in \mathscr{L}(X)$ durch

$$T(t) \coloneqq e^{tA} \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \text{ für } t \geq 0,$$

eine (wohldefinierte!) normstetige Halbgruppe gegeben ist.

2. Sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$. Zeige, dass die Abbildung (4)

$$T\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathscr{L}(X), \quad t \mapsto e^{tA}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$(ACP) \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) &= AT(t) \text{ für alle } t \geq 0, \\ T(0) &= \mathrm{Id} \end{cases}$$

ist. (Hinweis: Ist S eine weitere Lösung, so betrachte für festes $t > 0$ $Q_t(s) \coloneqq T(t-s)S(s)$ für $s \in [0,t]$ und leite Q_t mit der Produktregel ab.[1] Nutze dann aus, dass jede differenzierbare Funktion von einem Intervall in einen Banachraum, deren Ableitung verschwindet, schon konstant sein muss.)

3. Zeige: Für jede normstetige Halbgrupe T auf einem Banachraum X gibt es ein $A \in \mathscr{L}(X)$ mit $T(t) = e^{tA}$ für alle $t \geq 0$. Gehe dazu wie folgt vor. (4)

(i) Definiere für jedes $t > 0$ das Riemann-Integral[1]

$$V(t) \coloneqq \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s \in \mathscr{L}(X)$$

und zeige die Existenz eines $t_0 > 0$, so, dass $V(t_0)$ invertierbar ist. (Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}V(t) = T(0) = I$. Verwende nun, dass die invertierbaren Operatoren eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X)$ bilden.)

(ii) Zeige die Identität $T(t) = V(t_0)^{-1}(V(t+t_0) - V(t))$ für $t \geq 0$ und folgere hieraus, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ das Anfangswertpoblem (ACP) für ein geeignetes $A \in \mathscr{L}(X)$ löst.

(iii) Wende Aufgabe 2 an, um die Behauptung zu folgern.

4. Betrachte den Raum (4)

$$\mathrm{C}_0(\mathbb{R}) \coloneqq \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig } \mid \forall \varepsilon > 0\, \exists c > 0 \text{ mit } |f(x)| \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus [-c,c]\}$$

mit der Supremumsnorm $\|f\| \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Für eine stetige Funktion $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit nach oben beschränktem Realteil definieren wir die *Multiplikationshalbgruppe* $(M_q(t))_{t\geq 0}$ auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ durch $M_q(t)f(x) \coloneqq e^{tq(x)} \cdot f(x)$ für alle $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

[1] Ableitung und Riemann-Integral von $\mathscr{L}(X)$-wertigen Funktionen auf $[0,\infty)$ sind analog zum skalarwertigen Fall definiert. Weiterhin gelten wichtige Resultate wie die Produktregel oder der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch hier.

(i) Zeige, dass M_q eine (wohldefinierte!) stark stetige Halbgruppe ist.
(Hinweis: Nutze das Gleichstetigkeitslemma aus der Vorlesung und verwende, dass der Raum

$$\mathrm{C_c}(\mathbb{R}) := \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig } \mid \exists c > 0 \text{ mit } |f(x)| = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus [-c, c]\}$$

dicht in $\mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ liegt.)

(ii) Zeige, dass M_q genau dann eine normstetige Halbgruppe ist, wenn q beschränkt ist.
(Hinweis: Nimm für die „Hinrichtung" an, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $0 \neq |q(x_n)| \to \infty$ gibt. Setze dann $t_n := \frac{1}{|q(x_n)|}$ für $n \in \mathbb{N}$ und zeige, dass für geeignete Funktionen $f_n \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ mit Norm 1

$$\|M_q(t_n)f_n - f_n\| \not\to 0$$

gilt.)