Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 03.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 4*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 2

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Sei X ein Banachraum und A ein Operator auf X mit Definitionsbereich $D(A)$. Versehen mit der *Graphennorm* $\|\cdot\|$ definiert durch $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ für $x \in D(A)$ wird $D(A)$ zu einem normierten Raum.

(i) Zeige: A ist genau dann abgeschlossen, wenn $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ein Banachraum ist. (2)

(ii) Der Operator A heißt *abschließbar*, wenn es einen abgeschlossenen Operator B auf X, so, dass A eine *Einschränkung* von B ist (in Zeichen: $A \subseteq B$), d.h. $D(A) \subseteq D(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Zeige: Falls A abschließbar ist, gibt es einen kleinsten abgeschlossenen Operator $\overline{A}$ (genannt *Abschluss von A*) mit $A \subseteq \overline{A}$. (2)

2. Bestimme den Generator der *Diagonalhalbgruppe* M_q auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ von Blatt 1, Aufgabe 4. (4)

3. Gegeben sei eine C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X mit Generator $(A, D(A))$. Zeige, dass die folgenden Halbgruppen S stark stetig sind und bestimme jeweils den Generator (mit Definitionsbereich).

(i) $S(t) := e^{\alpha t} T(\beta t)$ für alle $t \geq 0$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\beta > 0$ feste Parameter sind. (1)

(ii) $S(t) := V^{-1} T(t) V$ für alle $t \geq 0$, wobei $V : Y \longrightarrow X$ ein Isomorphismus von einem Banachraum Y nach X ist. (1)

(iii) $S(t) := T(t)|_Z$ für alle $t \geq 0$, wobei $Z \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X mit $T(t)Z \subseteq Z$ für alle $t \geq 0$ ist. (1)

4. Für zwei Funktionen $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definieren wir die *Faltung* $f * g$ durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Weiter sei $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$ die *Fouriertransformation.*

(i)* Zeige, dass für zwei Schwartzfunktionen $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ die Faltung $f * g$ wieder in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ liegt und (2*)

$$\mathscr{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathscr{F} f \cdot \mathscr{F} g$$

erfüllt.

(ii)* Zeige, dass die Funktion $\gamma \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ gegeben durch $\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt von $\mathscr{F}$ ist, d.h. $\mathscr{F}\gamma = \gamma$. Hierbei darf verwendet werden, dass γ eine Schwartzfunktion ist und dass (2*)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \gamma(x) \, \mathrm{d}x = 1.$$

(Hinweis: Man betrachte die lineare gewöhnliche Differentialgleichung $y'(x) + xy(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und zeige dass sowohl γ als auch $\mathscr{F}\gamma$ diese Differentialgleichung mit Anfangswert $y(0) = 1$ lösen. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems folgt dann die Behauptung.)

Die *Gaußhalbgruppe* T auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$T(t)f(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,\mathrm{d}y$$

für $x \in \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und $t > 0$ sowie $T(0) \coloneqq I$. Für jedes $t > 0$ ist also $T(t)f = k_t * f$ für $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, wenn wir für $x \in \mathbb{R}$

$$k_t(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

setzen.

(iii) Zeige, dass $T(t) \in \mathscr{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$ für jedes $t > 0$. (1)

(iv) Zeige, dass durch $S(t) \coloneqq \mathscr{F} T(t) \mathscr{F}^{-1}$ für $t \geq 0$ gerade die Diagonalhalbgruppe auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ gegeben ist, welche durch die Funktion (2)

$$q \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto -x^2$$

induziert wird. (Hinweis: Zeige dies (wie in der Vorlesung) zunächst auf dem dichten Unterraum $\mathscr{F}\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Verwende dabei die Teilaufgaben (i)* und (ii)*. Folgere anschließend mit Teilaufgabe (iii) die Gleichheit auf ganz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.)

(v) Schließe, dass T eine C_0-Halbgruppe mit Generator A ist, wobei (2)

$$D(A) = \mathrm{W}^{2,2}(\mathbb{R}), \quad Af = f'' \text{ für alle } f \in D(A).$$