Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 19.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 2*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 4

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Sei $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und M_q der zugehörige *Multiplikationsoperator* auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, d.h.

$$D(M_q) := \{f \in C_0(\mathbb{R})\colon qf \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\},$$
$$M_q f := qf \text{ für alle } f \in D(M_q).$$

(i) Zeige, dass $\sigma(M_q) = \overline{q(\mathbb{R})}$ gilt. (2*)
(Hinweis: Wegen $\lambda - M_q = M_{\lambda - q}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ reicht es zu zeigen, dass genau dann $0 \notin \overline{q(M)}$ gilt, wenn M_q invertierbar mit beschränkter Inverse ist. Für die Rückrichtung dieser Äquivalenzaussage zeige man durch Wahl geeigneter Funktionen, dass $|q|$ nach unten beschränkt ist.)

(ii) Zeige mithilfe des Satzes von Hille-Yosida, dass $(M_q, D(M_q))$ genau dann eine kontraktive C_0-Halbgruppe erzeugt, wenn $\operatorname{Re} q(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (4)

2. Betrachte den Operator $(A, D(A))$ auf $\mathrm{C}_0((0,1))$, wobei (4)

$$\mathrm{C}_0((0,1)) := \{f \in \mathrm{C}((0,1))\colon \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta \in (0,1) \text{ mit } |f(x)| \leq \varepsilon \text{ für } x \notin [\delta, 1-\delta]\}$$

sowie $D(A) := \{f \in \mathrm{C}^2([0,1])\colon f, f'' \in \mathrm{C}_0((0,1))\}$ und $Af := f''$ für $f \in D(A)$. Zeige mithilfe des Satzes von Lumer-Phillips, dass $(A, D(A))$ Generator einer kontraktiven C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{C}_0((0,1))$ ist.
(Hinweis: Um die Dissipativität nachzuweisen wähle $x \in (0,1)$ mit $|f(x)| = \|f\|$. Anschließend finde man ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mu := \alpha \cdot \delta_x \in J(f)$ und $\operatorname{Re}\langle Af, \mu\rangle \leq 0$; hierbei ist δ_x die Punktauswertung in x.)

3. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und (4)

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}) := \overline{\mathrm{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})}^{\mathrm{H}^1(\Omega,\mathbb{R})} \subseteq \mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

Für $i, j \in \{1, ..., d\}$ sei $a_{ij} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ mit $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, ..., d\}$ und es gebe $\alpha > 0$ mit

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\|\xi\|_2^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und fast alle $x \in \Omega$. Wir betrachten nun den *elliptischen Operator* $(A, D(A))$ mit

$$D(A) := \left\{ u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\colon \sum_{i,j} D_i(a_{i,j}D_j u) \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}) \right\},$$
$$Au := \sum_{i,j} D_i(a_{i,j}D_j u) \text{ für } u \in D(A).$$

Zur Erinnerung: Nach Vorlesung bedeutet

$$\sum_{i,j} D_i(a_{i,j}D_j u) \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}),$$

dass ein $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$ existiert mit

$$-\int_\Omega \sum_{i,j} (a_{i,j} D_j u) D_i \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi \, \mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und in diesem Fall setzt man

$$\sum_{i,j} D_i(a_{i,j} D_j u) \coloneqq f.$$

Man zeige mithilfe des Satzes von Lumer-Phillips, dass $(A, D(A))$ eine kontraktive C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$ erzeugt.
(Hinweis: Man zeige, dass durch

$$[u, v] \coloneqq \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x + \sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} D_i u D_j v \, \mathrm{d}x$$

für $u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ ein Skalarpodukt auf $\mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ gegeben ist, welches äquivalent zum gewöhnlichen Skalarprodukt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ auf $\mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ ist, d.h. es gibt $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\alpha(u, u) \leq [u, u] \leq \beta(u, u)$$

für alle $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R})$. Man verwende nun (analog zur Vorlesung) den Satz von Riesz-Fréchet für den Hilbertraum $(\mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}), [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$, um zu zeigen, dass $I - A$ surjektiv ist.)

4. Sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter Operator auf einem Banachraum X und $(A', D(A'))$ dessen Adjungierte. Zeige: Ist $\lambda \in \varrho(A)$, so ist auch $\lambda \in \varrho(A')$ und es gilt $R(\lambda, A)' = R(\lambda, A')$. (4)