Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 26.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 7*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 5

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Es sei $(A, D(A))$ ein Operator auf einem Banachraum X, $\lambda \in \varrho(A)$ und $D_0 \subseteq D(A)$ ein Unterraum. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind. (4)

(a) D_0 liegt dicht in $D(A)$ bezüglich der Graphennorm.

(b) $(\lambda - A)D_0$ ist dicht in X.

(c) $A = \overline{A|_{D_0}}$.

2. Sei T eine C_0-Halbgruppe mit Generator $(A, D(A))$ auf einem Banachraum X und $D(A)$ sei mit der Graphennorm versehen. Zeige, dass durch die Einschränkung (4)

$$T_1(t) := T(t)|_{D(A)} \text{ für } t \geq 0$$

eine stark stetige Halbgruppe mit Generator $(A_1, D(A_1))$ gegeben ist, wobei

$$\begin{aligned} &D(A_1) = D(A^2), \\ &A_1 x = Ax \text{ für alle } x \in D(A_1). \end{aligned}$$

3. Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir den Raum

$$\mathrm{L}^p_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \colon \exists K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt mit } f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^d \setminus K\}.$$

Weiter definieren wir für konjugierte Indizes $1 < p, q < \infty$ (d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) die *Faltung*

(a) von $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ bzw.

(b) von $f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ und $q \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$

durch

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

für $x \in \mathbb{R}^d$.

(i) Zeige: Für konjugierte Indizes $1 < p, q < \infty$ gilt (2*)

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) * \mathrm{L}^q_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) &\subseteq \mathrm{C}(\mathbb{R}^d), \\ \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) * \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d) &\subseteq \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

(Hinweis: Für die zweite Inklusion nutze man aus, dass für $1 \leq r < \infty$ $\mathrm{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)$ liegt.)

(ii) Es sei $d \geq 3$ und E das *Newtonsche Potential*. Zeige, dass E genau dann in $\mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ liegt, wenn $q < \frac{d}{d-2}$ gilt. (2*)
Hierzu nutze man folgendes Resultat.
Sei $0 \leq R_1 < R_2$ und betrachte den Kreisring

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d \colon R_1 < \|x\| < R_2\}.$$

Für jede messbare Funktion $g\colon (R_1, R_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ und die zugehörige *radiale Funktion*

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(\|x\|)$$

gilt

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma_d \int_{R_1}^{R_2} g(r) r^{d-1}\,\mathrm{d}r,$$

wobei σ_d das Oberflächenvolumen der Sphäre $\mathrm{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \|x\| = 1\}$ ist.

(iii) Sei nun $d \geq 3$, $p > \frac{d}{2}$ und $f \in \mathrm{L}^p_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass $E * f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$. (1*)

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 3$ offen, beschränkt und Dirichletregulär. Weiter sei $p > \frac{d}{2}$ und $m\colon \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ messbar mit $\frac{1}{m} \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. Wir betrachten den Operator $(A, D(A))$ auf $\mathrm{C}_0(\Omega)$ mit

$$D(A) := \left\{ u \in \mathrm{C}_0(\Omega) \colon \exists f \in \mathrm{C}_0(\Omega) \text{ with } \Delta u = \frac{f}{m} \right\},$$
$$Au := f \text{ für } u \in D(A) \text{ mit } \Delta u = \frac{f}{m}.$$

(iv) Zeige, dass $(A, D(A))$ abgeschlossen ist. (2)

Es sei nun m stetig.

(v) Zeige, dass $(A, D(A))$ dissipativ ist. Man darf verwenden, dass für $u \in D(A)$ Lemma (11.4) gilt, d.h. falls $C := \max_{x \in \Omega} u(x) > 0$, so gibt es ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = C$ und $\Delta u(x_0) \leq 0$. (Wir werden in der Übungsgruppe besprechen, warum dies gilt.) (2*)

(vi) Zeige, dass $(A, D(A))$ m-dissipativ ist. (4)
(Hinweis: Man zeige zunächst, dass A surjektiv ist, und mache sich dann klar, dass jeder dissipative, surjektive und abgeschlossene Operator bereits m-dissipativ ist (siehe den Beweis des *surjektiven Lumer-Phillips-Theorems* (10.3)).

(vii) Zeige, dass $(A, D(A))$ eine kontraktive C_0-Halbgruppe erzeugt. (2)