Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 31.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 2*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 6

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Es sei $(A, D(A))$ ein Operator auf einem Banachraum X mit $\varrho(A) \neq \emptyset$. Wir versehen $D(A)$ mit der Graphennorm und betrachten den Operator $(A_1, D(A_1))$ auf $D(A)$, wobei (2*)

$$D(A_1) \coloneqq D(A^2),$$
$$A_1 x \coloneqq Ax \text{ für } x \in D(A_1).$$

Zeige: Falls $(A_1, D(A_1))$ Generator einer C_0-Halbgruppe auf $D(A)$ ist, so ist $(A, D(A))$ Generator einer C_0-Halbgruppe auf X.

2. (i) Man zeige mithilfe von Störungstheorie, dass $(A, D(A))$ mit (2)

$$D(A) \coloneqq \{f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) \colon f, f' \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\},$$
$$Af(x) \coloneqq f'(x) + f'(0)e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ für } f \in D(A) \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

eine C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ erzeugt. Dabei darf verwendet werden, dass $(B, D(B))$ mit $D(B) \coloneqq D(A)$ und $Bf \coloneqq f'$ für $f \in D(B)$ Generator einer C_0-Habgruppe ist (nämlich der Shifthalbgruppe).

(ii) Für Operatoren $(A, D(A))$ und $(B, D(B))$ auf einem Banachraum X definieren wir ihre *Summe* $(A + B, D(A + B))$ durch (2)

$$D(A + B) \coloneqq D(A) \cap D(B),$$
$$(A + B)x \coloneqq Ax + Bx \text{ für } x \in D(A + B).$$

Man zeige anhand eines Beispiels, dass die Summe von Generatoren im Allgemeinen kein Generator ist.

3. Sei $(A, D(A))$ der Generator einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X. Zeige, dass (4)

$$D(A^\infty) \coloneqq \{x \in X \colon x \in D(A^n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ein wesentlicher Definitionsbereich von A ist (d.h. $D(A^\infty)$ liegt dicht in $D(A)$ bzgl. der Graphennorm).
(Hinweis: Man zeige zunächst, dass $D(A^\infty)$ dicht in X liegt, und wende dann einen Satz aus der Vorlesung an. Für die Dichtheit in X wähle $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty((0, \infty))$ mit $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^1((0,\infty))} = 1$ und betrachte dann für $x \in X$ die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei

$$x_n \coloneqq \int_0^\infty n\varphi(nt)T(t)x \,\mathrm{d}t$$

für $n \in \mathbb{N}$.)

4. Es sei $(A, D(A))$ ein Operator auf einem komplexen Hilbertraum H. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind. (4)

(a) A ist selbstadjungiert.

(b) A ist dicht definiert, symmetrisch, abgeschlossen und $\pm i - A^*$ ist injektiv.

5. Es sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter, symmetrischer Operator auf einem kmplexen Hilbertraum H. (4)
Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $\overline{A}$ ist selbstadjungiert.

(b) $(\pm i - A)D(A)$ liegt dicht in H.