Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 14 + 6*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 7

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. (i) Zeige, dass der numerische Wertebereich von (2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ die Verbindungsstrecke zwischen λ_1 und λ_2 ist.
Anmerkung: Wegen des Spektralsatzes kennt man damit auch den numerischen Wertebereich beliebiger normaler 2×2 − Matrizen.

(ii) Zeige, dass der numerische Wertebereich von (2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$$

die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist.
(Hinweis: Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $re^{i\theta}$ mit $r \geq 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$ darstellen. Wende dies auf die Koordinaten der Vektoren $v \in \mathbb{C}^2$ mit $\|v\| = 1$ an.)

(iii) Betrachte den komplexen Hilbertraum $H = \ell^2$ und $A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. (2)
Zeige, dass $W(A)$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist.

2. Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(H)$ ein beschränkter Operator. Zeige, dass $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathrm{W}(A)}$. (4)

3. Betrachte den komplexen Hilbertraum $H = \mathrm{L}^2((0,\infty))$ und seien die Operatoren $(A, D(A))$ und $(B, D(B))$ definiert durch

$$D(A) \coloneqq \mathrm{H}^1_0((0,\infty)), \quad Af \coloneqq -f' \text{ für alle } f \in D(A),$$
$$D(B) \coloneqq \mathrm{H}^1((0,\infty)), \quad Bf \coloneqq f' \text{ für alle } f \in D(B).$$

Dann ist $(D, D(B))$ Generator einer kontraktiven C_0-Halbgruppe auf H (nämlich des Linksshifts; dies muss nicht gezeigt werden).

(i) Zeige, dass $B = A^*$. Insbesondere ist iA symmetrisch. (2)

(ii) Zeige, dass $(A, D(A))$ Generator einer kontraktiven C_0-Halbgruppe ist. Insbesondere ist (4*)

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_- \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

(iii) Zeige, dass $\sigma(A) = \mathbb{C}_-$. (2*)
(Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda < 0$ der Operator $\lambda - A^*$ nicht injektiv ist, denn dann ist $\lambda - A$ nicht surjektiv.)

(iv) Folgere, dass $\overline{W(iA)} = \mathbb{R}$. Insbesondere ist (2)

$$\sigma(iA) = i\mathbb{C}_- \not\subseteq \mathbb{R} = \overline{W(iA)}.$$