Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 23.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 8*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 9

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Für diese Aufgabe verwenden wir, dass jedes $f \in \mathrm{H}^1((a,b))$ mit einer Funktion in $\mathrm{C}([a,b])$ identifziert werden kann und

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\,\mathrm{d}y$$

für alle $x \in [a,b]$. (Jedes $f \in \mathrm{H}^1((a,b))$ ist eine Äquivalenzklasse von Funktionen. Man kann zeigen, dass jene genau eine stetige Funktion $\mathrm{C}([a,b])$ enthält und identifiziert dann f mit dieser.)
Es sei nun $b > 0$ und $V \coloneqq \{u \in \mathrm{H}^1((0,b))\colon u(0) = 0\}$.

(i) Zeige die *Poincaré-Ungleichung* (2)

$$\int_0^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{b^2}{2}\int_0^b |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x \text{ für alle } u \in V.$$

(ii) Zeige, dass die Sesquilinearform (2)

$$a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (u,v) \mapsto \int_0^b u'(x)\overline{v'(x)}\,\mathrm{d}x$$

stetig und koerziv ist.

(iii) Wir fassen nun V als Unterraum von $H \coloneqq \mathrm{L}^2((0,b))$ auf. Zeige, dass die Form a auf H sektoriell, abgeschlossen und dicht definiert ist. (2)
(Hinweis: Verwende Aufgabe 4 von Blatt 8.)

(iv) Zeige, dass für $f, g \in \mathrm{H}^1((0,b))$ gilt, dass (2)

$$\int_0^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(0)g(0).$$

(v) Man zeige, dass der zu a assoziierte Operator A auf H gegeben ist durch (2)

$$D(A) = \{u \in \mathrm{H}^2((0,b))\colon u(0) = 0, u'(b) = 0\},$$
$$Au = -u'' \text{ für alle } u \in D(A).$$

Hierbei ist

$$\mathrm{H}^2((0,b)) = \{f \in \mathrm{H}^1((0,b))\colon f' \in \mathrm{H}^1((0,b))\}$$

und $f'' \coloneqq (f')'$ für $f \in \mathrm{H}^2((0,b))$.
Anmerkung: Aus den Resultaten der Vorlesung folgt, dass $-A$ Generator einer holomorphen Kontraktionshalbgruppe auf $\mathrm{L}^2((0,b))$ ist.

2. (i) Es sei A Generator einer beschränkten stark stetigen **Gruppe** auf einem Banachraum X. Zeige, dass A^2 Generator einer beschränkten holomorphen C_0-Halbgruppe auf X ist. (4)
(Hinweis: Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ beliebig und $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta}$. Wir finden dann eine Wurzel $\mu = re^{i\alpha}$ von λ mit $|\alpha| < \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \theta)$. Schreibe den Operator $(\lambda - A^2)$ geeignet als Produkt und zeige damit, dass $\lambda \in \varrho(A^2)$ und dass

$$R(\lambda, A^2) = R(\mu, A)R(\mu, -A).$$

Nutze dann diese Identität sowie Abschätzungen für die Resolventen von A und $-A$, um Bedingung (i) in Theorem (20.3) nachzuweisen.)
Anmerkung: Die hier bewiesene Aussage gilt auch im unbeschränkten Fall: Ist A ein Generator einer C_0-Gruppe, so ist A^2 Generator einer holomorphen C_0-Halbgruppe.

(ii) Wir betrachten den Operator A auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ wobei (2)

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})\colon f, f', f'' \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\}, \\ Af &:= f'' \text{ für alle } f \in D(A). \end{aligned}$$

Zeige, dass A eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt.

3. Wir betrachten die folgende Variante der so genannten *Black-Scholes-Gleichung*, die den Wert für Call-Optionen am europäischen Aktienmarkt beschreibt.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(x,t) = -\frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - rx\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + ru(x,t) & \text{für alle } x \in (0,\infty),\, t \in [0,T], \\ u(x,T) = h(x) & \text{für alle } x \in (0,\infty), \end{cases}$$

wobei $\sigma > 0$ (Volatilität), $r > 0$ (Zinssatz) und $T > 0$ (Laufzeit) feste Parameter sind sowie $h \in \mathrm{C}_0((0,\infty))$ eine feste Funktion. Mit Substitution und Reskalierung kann man dieses Problem auf das abstrakte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f'(t) &= Af(t) \text{ für alle } t \geq 0, \\ f(0) &= h \end{aligned}$$

auf dem Raum $\mathrm{C}_0((0,\infty))$ zurückführen, wobei

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{f \in \mathrm{C}^2((0,\infty))\colon q^2 \cdot f'',\, q \cdot f',\, f \in \mathrm{C}_0((0,\infty))\}, \\ Af &:= q^2 \cdot f'' + c \cdot q \cdot f' - cf \text{ für } f \in D(A) \end{aligned}$$

sowie $q(x) := x$ für alle $x \in (0,\infty)$ und $c := \frac{2r}{\sigma^2} > 0$. Wir wollen zeigen, dass $(A, D(A))$ eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt.

(i) Es sei $\eta := \frac{1}{2}(c-1)$ und $(B, D(B))$ gegeben durch (2*)

$$\begin{aligned} D(B) &:= \{f \in \mathrm{C}^1((0,\infty))\colon q \cdot f', f \in \mathrm{C}_0((0,\infty))\}, \\ Bf &:= q \cdot f' \text{ für alle } f \in D(B). \end{aligned}$$

Zeige $D(A) = D(B^2)$ und

$$Af = (B+\eta)^2 f - (1+\eta)^2 f$$

für alle $f \in D(A)$.

(ii) Zeige, dass durch $Vf(x) := f(e^x)$ für $f \in \mathrm{C}_0((0,\infty))$ und $x \in \mathbb{R}$ ein isometrischer Isomorphismus (2*)

$$V\colon \mathrm{C}_0((0,\infty)) \longrightarrow \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$$

definiert wird.

(iii) Zeige, dass der Operator VBV^{-1} (mit Definitionsbereich $\{f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\colon V^{-1}f \in D(B)\}$) gerade die erste Ableitung auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ mit Definitionsbereich (2*)

$$\{f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})\colon f, f' \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\}$$

ist.

(iv) Folgere nun, dass $(A, D(A))$ eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt. Es darf dafür die allgemeinere Version von Aufgabe 2(i) verwendet werden. (2*)