Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 30.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 16*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 10

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Für $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ sei T die zugehörige Halbgruppe, also $T(t) := e^{tA}$ für alle $t \geq 0$. Gib Beispiele für Matrizen $A \neq I$ mit den folgenden Eigenschaften. (5)

- (i) $\lim_{t\to\infty} T(t)x = 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^2$.
- (ii) T ist *periodisch*, d.h. es gibt ein $t > 0$ mit $T(t) = I$.
- (iii) Für alle $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ist die Bahn $\{T(t)x\colon t \geq 0\}$ unbeschränkt.
- (iv) Es gibt $x, y \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, so, dass $\{T(t)x\colon t \geq 0\}$ beschränkt und $\{T(t)y\colon t \geq 0\}$ unbeschränkt.
- (v) $\omega(A) = 0$, aber T nicht beschränkt.

2. Eine C_0-Halbgruppe T heißt *gleichmäßig stabil*, falls $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$. Es sei nun T eine C_0-Halbgruppe mit Generator A auf einem Banachraum X. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind. (3)

- (a) $\omega(A) < 0$.
- (b) T ist gleichmäßig stabil.
- (c) Es gibt ein $t > 0$ mit $\|T(t)\| < 1$.
- (d) Es gibt ein $t > 0$ mit $r(T(t)) < 1$.

3. Eine C_0-Halbgruppe T mit Generator A erfüllt den *schwachen spektralen Abbildungssatz*, falls

$$\sigma(T(t)) = \overline{e^{t\sigma(A)}} \text{ für alle } t \geq 0$$

gilt.

- (i) Es sei nun $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit beschränktem Realteil und T die zugehörige Multiplikationshalbgruppe auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, d.h. $T(t)f(x) := e^{tq(x)}f(x)$ für alle $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ (siehe Aufgabe 4 von Blatt 1). Zeige: T erfüllt den schwachen spektralen Abbildungssatz. (4)
  (Hinweis: Benutze Aufgabe 1 von Blatt 4.)
- (ii) Es sei nun T eine C_0-Halbgruppe mit Generator A, die den schwachen spektralen Abbildungssatz erfüllt. Zeige, dass $s(A) = \omega(A)$. (4)

4. Es seien X und Y Banachräume und Y sei ein Unterraum von X (mit nicht unbedingt derselben Norm). Wir nennen die Inklusion $X \subseteq Y$ *stetig*, falls es ein $M \geq 0$ gibt mit $\|y\|_X \leq M\|y\|_Y$ für alle $y \in Y$ gibt.
Es sei nun A ein Operator auf einem Banachraum X. Es sei Y ein weiterer Banachraum mit stetiger Inklusion $Y \subseteq X$ und $A|_Y$ sei der *Teil von A in Y*, d.h.

$$D(A|_Y) := \{y \in D(A) \cap Y\colon Ay \in Y\},$$
$$A|_Y y := Ay \text{ für alle } y \in D(A|_Y).$$

- (i) Es sei $\lambda \in \varrho(A)$ mit $R(\lambda, A)Y \subseteq Y$. Zeige, dass dann $\lambda \in \sigma(A|_Y)$ und $R(\lambda, A|_Y) = R(\lambda, A)|_Y$. (2*)

Es sei nun zusätzlich $\varrho(A) \neq \emptyset$, $D(A)$ sei mit der Graphennorm versehen und $D(A) \subseteq Y$ stetig.

- (ii) Zeige nun, dass A_1 (siehe Aufgabe 1 von Blatt 6) gleich dem Teil von $A|_Y$ in $D(A)$ ist. (2*)

(iii) Zeige, dass $\sigma(A|_Y) = \sigma(A)$. (1*)
(Hinweis: Benutze (i) und (ii) um $\sigma(A_1) \subseteq \sigma(A|_Y)$ zu zeigen. Wir wissen aus dem Beweis von Aufgabe 1 von Blatt 6, dass A_1 und A *ähnlich* sind, d.h. es gibt einen Isomorphismus $V \in \mathscr{L}(X, D(A))$ (nämlich die Resolvente) mit $A_1 = V^{-1}AV$. Da ähnliche Operatoren dasselbe Spektrum haben (dies muss hier nicht gezeigt werden!), folgt $\sigma(A_1) = \sigma(A)$.)

5. Es sei $1 < p < \infty$. Für jedes $q \in [p, \infty)$ betrachten wir den Raum $X_q := \mathrm{L}^p((1,\infty)) \cap \mathrm{L}^q((1,\infty))$. Durch

$$\|f\| := \max(\|f\|_p, \|f\|_q)$$

für $f \in X_q$ wird eine Norm auf X_q definiert bezüglich welcher X_q vollständig ist. Wir definieren nun $T_q(t)f(x) := f(x \cdot e^t)$ für $f \in X_q$, $x \in (1, \infty)$ und $t \geq 0$. Dann ist T_q eine C_0-Halbgruppe und es sei A_q ihr Generator.

(i) Zeige, dass $\omega(A_q) = -\frac{1}{q}$. (2*)
(Hinweis: Zeige zunächst, dass $\|T_q(t)f\| \leq e^{-\frac{t}{q}}\|f\|$ für alle $f \in X_q$ und $t \geq 0$. Betrachte dann für festes $t \geq 0$ die Funktion $f \in X_q$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & e^t \leq x \leq e^t + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und folgere $\|T_q(t)\| = e^{-\frac{t}{q}}$ für alle $t \geq 0$.)

(ii) Zeige, dass $s(A_q) \geq -\frac{1}{p}$. (2*)
(Hinweis: Betrachte für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda < -\frac{1}{p}$ die Funktion f_λ definiert durch $f_\lambda(x) := x^\lambda$ für $x \in (1, \infty)$. Zeige dann, dass $f_\lambda \in X_q$ und $T(t)f_\lambda = e^{\lambda t}f_\lambda$ für alle $t \geq 0$.)

(iii) Zeige, dass $s(A_q) = -\frac{1}{p}$. Es darf dabei verwendet werden, dass A_q der Teil von A_p in X_q ist[1]. (7*)
(Hinweis: Im Fall $p = q$ wissen wir nach (i) und (ii) nun $s(A_p) = \omega(A_p) = -\frac{1}{p}$. Insbesondere erhalten wir wegen $\omega < 0$ die Resolventendarstellung

$$(R(0, A_p)f)(x) = \int_0^\infty (T_p(s)f)(x)\,\mathrm{d}s.$$

für fast alle $x \in (1, \infty)$ für alle $f \in X_p = \mathrm{L}^p((1, \infty))$. Zeige nun mithilfe geeigneter Abschätzungen, dass

$$D(A_p) = \operatorname{Bild}(R(0, A_p)) \subseteq X_q \subseteq X_p = \mathrm{L}^p((1, \infty))$$

und dass diese Inklusionen stetig sind. Wende dann Aufgabe 4 an.)

Anmerkung: Für $p < q$ gilt also $\omega(A_q) < s(A_q)$.

[1] Dies folgt daraus, dass T_q die Einschränkung von T_p auf X_q ist, siehe etwa Abschnitt II.2.3 in Engel, Nagel: One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.