Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 12.07.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 26*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 12

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.
Meldet Euch bitte im Hochschulportal für die Vorleistung an!

1. Es sei A der Generator einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X. Für $f \in \mathrm{L}^1((0,1);X)$ betrachten wir das inhomogene Problem (6)

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \text{ für } t \in [0,1].$$

Es sei $1 \in \varrho(T(1))$ und für jedes $f \in \mathrm{L}^1((0,1);X)$ sei u_f die eindeutige periodische milde Lösung des obigen Problems. Zeige, dass

$$\Phi\colon \mathrm{L}^1((0,1);X) \longrightarrow \mathrm{C}([0,1];X), \quad f \mapsto u_f$$

ein beschränkter Operator ist.
(Hinweis: Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen reicht es zu zeigen, dass Φ linear und abgeschlossen ist.)

2. Es sei A Generator einer C_0-Halbgruppe auf einem komplexen separablen Hilbertraum H. Zeige, dass (6)

$$\omega(A) = \inf\left\{\omega > s(A)\colon \sup_{\operatorname{Re}\lambda > \omega} \|R(\lambda, A)\| < \infty\right\}.$$

3. (i) Es sei $1 < p < q < \infty$ und es seien X_q, A_q und T_q wie in Aufgabe 5 von Blatt 10. Zeige, dass (6*)

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{q}} \|R(\lambda, A_q)\| < \infty.$$

Dabei darf verwendet werden, dass

$$(R(\lambda, A_q)f)(x) = x^\lambda \int_x^\infty \frac{f(s)}{s^{\lambda+1}}\,\mathrm{d}s$$

für fast alle $x \in (1,\infty)$ für $f \in X_q$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{p}$. (Dies folgt analog zu den Überlegungen in Aufgabe 5 von Blatt 10.)
(Hinweis: Der Beweis ist recht rechenlastig. Es sei $f \in X_q$. Mittels der obigen Darstellung und der Hölderungleichung für p (und den dazu konjugierten Index p') kann man die Norm $\|R(\lambda, A_q)f\|_q$ gleichmäßig abschätzen. Um eine Abschätzung für $\|R(\lambda, A_q)f\|_p$ zu erhalten, erinnere man sich, dass $R(\lambda, A_q)f = R(\lambda, A_p)f$ und $\omega(A_p) = -\frac{1}{p}$.)

(ii) Konstruiere mithilfe von (i) ein Beispiel für eine C_0-Halbgruppe T mit Generator A auf einem Banachraum X, so, dass (4)

$$\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \varrho(A),$$
$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > 0} \|R(\lambda, A)\| < \infty.$$

und $\omega(A) \geq 0$.
Anmerkung: Der Satz von Gearhard-Prüss gilt somit nicht für beliebige Banachräume.

4. Für Hilberträume H_n mit $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *direkte Hilbertraumsumme*

$$H \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n \coloneqq \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in H_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2 < \infty\right\}.$$

(i) Zeige, dass durch $(x|y) := \sum_{n=1}^{\infty}(x_n|y_n)$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ ein inneres Produkt auf H definiert ist, bezüglich dessen H ein Hilbertraum ist. (4*)

(ii) Zeige, dass H separabel ist, falls H_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ separabel ist (3*)

Es sei nun $H_n := \mathbb{C}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und H (wie oben) die direkte Hilbertraumsumme der H_n. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \begin{pmatrix} in & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & in \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(H_n).$$

Weiter sei der Operator A auf H definiert durch

$$D(A) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \colon (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H\},$$
$$A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ für } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$$

und es sei $T(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (e^{tA_n} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ und $t \geq 0$.

(iii) Zeige, dass $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \varrho(A)$. (3*)
(Hinweis: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Zeige zunächst für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\lambda \in \varrho(A_n)$ mit

$$R(\lambda, A_n) = R(\lambda - in, A_n - in) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(A_n - in)^k}{(\lambda - in)^{k+1}}.$$

gilt. Setze diese Operatoren anschließend zu einem Operator auf H zusammen.)

(iv) Zeige, dass T eine C_0-Halbgruppe auf H mit Generator A ist und dass $\|T(t)\| \leq e^t$ für alle $t \geq 0$ gilt. Somit ist $\omega(A) \leq 1$. (4*)

(v) Zeige, dass $s(A) = 0$. (2*)
(Hinweis: Zeige, dass $i\mathbb{N} \subseteq \sigma_p(A)$.)

(vi) Zeige, dass $\omega(A) = 1$. (4*)
(Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass $e^{2\pi} \in \sigma(T(2\pi))$ (warum?). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n = H_n$$

und

$$x^n := (0, \dots, 0, x_n, 0, \dots) \in H,$$

wobei der einzige nicht-verschwindende Eintrag x_n an n-ter Stelle steht. Zeige, dass $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein approximativer Eigenvektor von $T(2\pi)$ zum approximativen Eigenwert $e^{2\pi}$ ist.)

Anmerkung: Die Resolventenbeschränktheit kann im Theorem von Gearhard-Prüss also nicht weggelassen werden.