Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 0 + 16*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 13

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Dies ist ein Bonusblatt.
Meldet Euch bitte bis Freitag, 21.07., 10 Uhr im Hochschulportal für die Vorleistung an!

1. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Es sei weiter T eine positive C_0-**Gruppe** auf $X := \mathrm{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit Generator A. Zeige, dass entweder $\sigma(A) \neq \emptyset$ oder X der Nullraum ist. (Hinweis: Angenommen $\sigma(A) = \emptyset$. Dann gilt $R(\lambda, \pm A)f \geq 0$ für jedes $f \in X$ mit $f \geq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (warum?).) (6*)

2. Es sei wieder (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$ sowie $X := \mathrm{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Zu $f \in X$ definieren wir den Betrag $|f| \in X$ durch $|f|(x) := |f(x)|$ für $x \in \Omega$.

(i) Zeige, dass ein beschränkter Operator $S \in \mathscr{L}(X)$ genau dann positiv ist, wenn $|Sf| \leq S|f|$ für alle $f \in X$ gilt. (2*)

Es sei nun T eine positive C_0-Halbgruppe auf $X := \mathrm{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit Generator A.

(ii) Zeige, dass (6*)

$$s(A) = \inf \left\{ \omega > s(A) \colon \sup_{\operatorname{Re} \lambda > \omega} \|R(\lambda, A)\| < \infty \right\}.$$

(Hinweis: Es sei $\omega > s(A)$. Zeige, dass

$$|R(\lambda, A)f| \leq R(\operatorname{Re} \lambda, A)|f| \leq R(\omega, A)|f|$$

für alle $f \in X$ und damit $\|R(\lambda, A)\| \leq \|R(\omega, A)\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.)

(iii) Es sei nun $p = 2$ und der Raum $\mathrm{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ sei separabel. Zeige, dass $s(A) = \omega(A)$. (2*)

Anmerkung: Bei der Bearbeitung der Aufgabe darf natürlich **nicht** das Resultat von Weis verwendet werden, dass für Generatoren A von positiven Halbgruppen auf $\mathrm{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ stets $s(A) = \omega(A)$ gilt.