

(11.4) Lemma

Sei $u \in C_0(\Omega)$ mit $C := \max_{x \in \Omega} u(x) > 0$.

Ang. $\Delta u \in C(\Omega)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \Omega : u(x_0) = C, \Delta u(x_0) \leq 0$.

Beweis:

Wegen $C_0(\Omega) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^d)$ können wir u als Funktion in $C(\mathbb{R}^d)$ auffassen.

Es gilt dann

$$u_n = u * g_n \longrightarrow u \text{ in } C(\Omega).$$

Sei $x_n \in \Omega$ mit $u_n(x_n) = \max_{x \in \Omega} u_n(x)$.

Wir finden Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in \overline{\Omega}.$$

$$\Rightarrow C = \|u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_{n_n})$$

und daher

$$\begin{aligned} |u(x_0) - C| &\leq |u(x_0) - u(x_{n_k})| + |u(x_{n_k}) - u_n(x_{n_k})| \\ &\quad + |u_n(x_{n_k}) - \overbrace{C}^{\text{C}}| \\ &\leq |u(x_0) - u(x_{n_k})| + \|u - u_n\|_{\infty} + |u_n(x_{n_k}) - C| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

also $u(x_0) = C$.

Insbesondere gilt $x_0 \in \Omega$.

Wir zeigen $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta u_n(x_{n_k}) = \Delta u(x_0)$.

Wähle $u_0 \in \mathcal{E}(\Omega)$ mit $B(x_0, \frac{1}{2u_0}) \subseteq \Omega$.

Wir finden ~~also~~ dann $\tilde{u}$ mit $u_n \geq 2u_0 \quad \forall n \geq \tilde{n}$.

Es gilt dann

$$\text{supp } g_{n_k} \subseteq \overline{B(x_0, \frac{1}{2u_0})} \quad \forall n \geq \tilde{n},$$

also gilt für jedes $x \in \overline{B(x_0, \frac{1}{2u_0})}$ und

$$\varphi_{n_k}^x(\gamma) := g_{n_k}(x - \gamma) \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^d;$$

$$\text{supp } \varphi_{n_k}^x \subseteq \overline{B(x_0, \frac{1}{2u_0})} \subseteq \Omega \quad \forall k \geq \tilde{n},$$

d.h. $\varphi_{n_k}^x|_{\Omega} \in D(\Omega)$.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^d}^{\text{Leb.}} \Delta g_n(x-y) u(y) dy \\
 &= \int_{\Omega} \Delta \psi_n^x(y) u(y) dy \\
 &= \int_{\Omega} \psi_n^x(y) \Delta u(y) dy \\
 &= \int_{\Omega} g_n(x-y) \Delta u(y) dy \\
 &= (g_n * \Delta u)(x) \quad \forall x \in \overline{B(x_0, \frac{1}{2n})} \subset \Omega.
 \end{aligned}$$

Wie in der Vorlesung folgt:

$$\left| \Delta u_n \right|_{\overline{B(x_0, \frac{1}{2n})}} \longrightarrow \left| \Delta u \right|_{\overline{B(x_0, \frac{1}{2n})}} \quad \text{gleichmäßig.}$$

($\Delta u|_{\overline{B(x_0, \frac{1}{2n})}}$ ist stetig!)

Folglich:

$$\begin{aligned}
 & \left| \Delta u_n(x_n) - \Delta u(x_0) \right| \\
 & \leq \left| \Delta u_n(x_n) - \Delta u(x_n) \right| + \left| \Delta u(x_n) - \Delta u(x_0) \right| \\
 & \stackrel{n \text{ groß}}{\leq} \left\| \Delta u_n \right|_{\overline{B(x_0, \frac{1}{2n})}} - \Delta u \Big|_{\overline{B(x_0, \frac{1}{2n})}} \Big\| + \left| \Delta u(x_n) - \Delta u(x_0) \right| \\
 & \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \Delta u(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta u_n(x_n) \leq 0. \quad \square$$