Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 1

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.

1. Sei X ein Banachraum und $\mathscr{L}(X)$ der Raum aller beschränkten linearen Operatoren auf X versehen mit der Operatornorm. Eine stetige Abbildung $T\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ mit (4)

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$,

(ii) $T(0) = \mathrm{Id}$

heißt *normstetige Halbgruppe*. Zeige, dass für jedes $A \in \mathscr{L}(X)$ durch

$$T(t) \coloneqq e^{tA} \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \text{ für } t \geq 0,$$

eine (wohldefinierte!) normstetige Halbgruppe gegeben ist.

2. Sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$. Zeige, dass die Abbildung (4)

$$T\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathscr{L}(X), \quad t \mapsto e^{tA}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$(ACP) \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) & = AT(t) \text{ für alle } t \geq 0, \\ T(0) & = \mathrm{Id} \end{cases}$$

ist. (Hinweis: Ist S eine weitere Lösung, so betrachte für festes $t > 0$ $Q_t(s) \coloneqq T(t-s)S(s)$ für $s \in [0,t]$ und leite Q_t mit der Produktregel ab.[1] Nutze dann aus, dass jede differenzierbare Funktion von einem Intervall in einen Banachraum, deren Ableitung verschwindet, schon konstant sein muss.)

3. Zeige: Für jede normstetige Halbgrupe T auf einem Banachraum X gibt es ein $A \in \mathscr{L}(X)$ mit $T(t) = e^{tA}$ für alle $t \geq 0$. Gehe dazu wie folgt vor. (4)

(i) Definiere für jedes $t > 0$ das Riemann-Integral[1]

$$V(t) \coloneqq \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s \in \mathscr{L}(X)$$

und zeige die Existenz eines $t_0 > 0$, so, dass $V(t_0)$ invertierbar ist. (Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}V(t) = T(0) = I$. Verwende nun, dass die invertierbaren Operatoren eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X)$ bilden.)

(ii) Zeige die Identität $T(t) = V(t_0)^{-1}(V(t+t_0) - V(t))$ für $t \geq 0$ und folgere hieraus, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ das Anfangswertpoblem (ACP) für ein geeignetes $A \in \mathscr{L}(X)$ löst.

(iii) Wende Aufgabe 2 an, um die Behauptung zu folgern.

4. Betrachte den Raum (4)

$$\mathrm{C}_0(\mathbb{R}) \coloneqq \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig } \mid \forall \varepsilon > 0\, \exists c > 0 \text{ mit } |f(x)| \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus [-c,c]\}$$

mit der Supremumsnorm $\|f\| \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Für eine stetige Funktion $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit nach oben beschränktem Realteil definieren wir die *Multiplikationshalbgruppe* $(M_q(t))_{t\geq 0}$ auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ durch $M_q(t)f(x) \coloneqq e^{tq(x)} \cdot f(x)$ für alle $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

[1] Ableitung und Riemann-Integral von $\mathscr{L}(X)$-wertigen Funktionen auf $[0,\infty)$ sind analog zum skalarwertigen Fall definiert. Weiterhin gelten wichtige Resultate wie die Produktregel oder der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch hier.

(i) Zeige, dass M_q eine (wohldefinierte!) stark stetige Halbgruppe ist.
(Hinweis: Nutze das Gleichstetigkeitslemma aus der Vorlesung und verwende, dass der Raum

$$\mathrm{C_c}(\mathbb{R}) := \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig } \mid \exists c > 0 \text{ mit } |f(x)| = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus [-c, c]\}$$

dicht in $\mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ liegt.)

(ii) Zeige, dass M_q genau dann eine normstetige Halbgruppe ist, wenn q beschränkt ist.
(Hinweis: Nimm für die „Hinrichtung" an, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $0 \neq |q(x_n)| \to \infty$ gibt. Setze dann $t_n := \frac{1}{|q(x_n)|}$ für $n \in \mathbb{N}$ und zeige, dass für geeignete Funktionen $f_n \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ mit Norm 1

$$\|M_q(t_n)f_n - f_n\| \not\to 0$$

gilt.)

Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 03.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 4*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 2

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Sei X ein Banachraum und A ein Operator auf X mit Definitionsbereich $D(A)$. Versehen mit der *Graphennorm* $\|\cdot\|$ definiert durch $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ für $x \in D(A)$ wird $D(A)$ zu einem normierten Raum.

(i) Zeige: A ist genau dann abgeschlossen, wenn $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ein Banachraum ist. (2)

(ii) Der Operator A heißt *abschließbar*, wenn es einen abgeschlossenen Operator B auf X, so, dass A eine *Einschränkung* von B ist (in Zeichen: $A \subseteq B$), d.h. $D(A) \subseteq D(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Zeige: Falls A abschließbar ist, gibt es einen kleinsten abgeschlossenen Operator $\overline{A}$ (genannt *Abschluss von A*) mit $A \subseteq \overline{A}$. (2)

2. Bestimme den Generator der *Diagonalhalbgruppe* M_q auf $C_0(\mathbb{R})$ von Blatt 1, Aufgabe 4. (4)

3. Gegeben sei eine C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X mit Generator $(A, D(A))$. Zeige, dass die folgenden Halbgruppen S stark stetig sind und bestimme jeweils den Generator (mit Definitionsbereich).

(i) $S(t) := e^{\alpha t}T(\beta t)$ für alle $t \geq 0$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\beta > 0$ feste Parameter sind. (1)

(ii) $S(t) := V^{-1}T(t)V$ für alle $t \geq 0$, wobei $V: Y \longrightarrow X$ ein Isomorphismus von einem Banachraum Y nach X ist. (1)

(iii) $S(t) := T(t)|_Z$ für alle $t \geq 0$, wobei $Z \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X mit $T(t)Z \subseteq Z$ für alle $t \geq 0$ ist. (1)

4. Für zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ definieren wir die *Faltung* $f * g$ durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Weiter sei $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}))$ die *Fouriertransformation.*

(i)* Zeige, dass für zwei Schwartzfunktionen $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ die Faltung $f * g$ wieder in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ liegt und (2*)

$$\mathscr{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathscr{F}f \cdot \mathscr{F}g$$

erfüllt.

(ii)* Zeige, dass die Funktion $\gamma \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ gegeben durch $\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt von $\mathscr{F}$ ist, d.h. $\mathscr{F}\gamma = \gamma$. Hierbei darf verwendet werden, dass γ eine Schwartzfunktion ist und dass (2*)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

(Hinweis: Man betrachte die lineare gewöhnliche Differentialgleichung $y'(x) + xy(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und zeige dass sowohl γ als auch $\mathscr{F}\gamma$ diese Differentialgleichung mit Anfangswert $y(0) = 1$ lösen. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems folgt dann die Behauptung.)

Die *Gaußhalbgruppe* T auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$T(t)f(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,\mathrm{d}y$$

für $x \in \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und $t > 0$ sowie $T(0) := I$. Für jedes $t > 0$ ist also $T(t)f = k_t * f$ für $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, wenn wir für $x \in \mathbb{R}$

$$k_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

setzen.

(iii) Zeige, dass $T(t) \in \mathscr{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$ für jedes $t > 0$. (1)

(iv) Zeige, dass durch $S(t) := \mathscr{F} T(t) \mathscr{F}^{-1}$ für $t \geq 0$ gerade die Diagonalhalbgruppe auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ gegeben ist, welche durch die Funktion (2)

$$q \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto -x^2$$

induziert wird. (Hinweis: Zeige dies (wie in der Vorlesung) zunächst auf dem dichten Unterraum $\mathscr{F}\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Verwende dabei die Teilaufgaben (i)* und (ii)*. Folgere anschließend mit Teilaufgabe (iii) die Gleichheit auf ganz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.)

(v) Schließe, dass T eine C_0-Halbgruppe mit Generator A ist, wobei (2)

$$D(A) = \mathrm{W}^{2,2}(\mathbb{R}), \quad Af = f'' \text{ für alle } f \in D(A).$$

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 12.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 8

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 3

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Dieses Übungsblatt ist etwas kürzer und gibt daher nur 8 Punkte.

1. Sei A ein Operator auf einem Banachraum X und B eine *Einschränkung* von A (in Zeichen: $B \subseteq A$), d.h. $D(B) \subseteq D(A)$ und $Bx = Ax$ für alle $x \in D(B)$. Zeige:

(i) Falls B surjektiv und A injektiv ist, so gilt $A = B$. (2)

(ii) Falls $\varrho(A) \cap \varrho(B) \neq \emptyset$, so gilt $A = B$. (2)

2. Zeige, dass die folgenden Operatoren $(A, D(A))$ **keine** Generatoren von C_0-Halbgruppen auf $\mathrm{C}([0,1])$ sind.

(i) $Af := f'$ für $f \in D(A) := \{f \in \mathrm{C}^1([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ (2)
(Hinweis: Man zeige, dass A nicht dicht definiert ist.)

(ii) $Af := f''$ für $f \in D(A) := \{f \in \mathrm{C}^2([0,1]) \mid f''(0) = 0\}$ (2)
(Hinweis: Man zeige, dass $\varrho(A) = \emptyset$.)

Universität Ulm
Abgabe: Freitag, 19.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 2*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 4

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Sei $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und M_q der zugehörige *Multiplikationsoperator* auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, d.h.

$$D(M_q) := \{f \in C_0(\mathbb{R})\colon qf \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\},$$
$$M_q f := qf \text{ für alle } f \in D(M_q).$$

(i) Zeige, dass $\sigma(M_q) = \overline{q(\mathbb{R})}$ gilt. (2*)
(Hinweis: Wegen $\lambda - M_q = M_{\lambda - q}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ reicht es zu zeigen, dass genau dann $0 \notin \overline{q(M)}$ gilt, wenn M_q invertierbar mit beschränkter Inverse ist. Für die Rückrichtung dieser Äquivalenzaussage zeige man durch Wahl geeigneter Funktionen, dass $|q|$ nach unten beschränkt ist.)

(ii) Zeige mithilfe des Satzes von Hille-Yosida, dass $(M_q, D(M_q))$ genau dann eine kontraktive C_0-Halbgruppe erzeugt, wenn $\operatorname{Re} q(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (4)

2. Betrachte den Operator $(A, D(A))$ auf $\mathrm{C}_0((0,1))$, wobei (4)

$$\mathrm{C}_0((0,1)) := \{f \in \mathrm{C}((0,1))\colon \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta \in (0,1) \text{ mit } |f(x)| \leq \varepsilon \text{ für } x \notin [\delta, 1-\delta]\}$$

sowie $D(A) := \{f \in \mathrm{C}^2([0,1])\colon f, f'' \in \mathrm{C}_0((0,1))\}$ und $Af := f''$ für $f \in D(A)$. Zeige mithilfe des Satzes von Lumer-Phillips, dass $(A, D(A))$ Generator einer kontraktiven C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{C}_0((0,1))$ ist.
(Hinweis: Um die Dissipativität nachzuweisen wähle $x \in (0,1)$ mit $|f(x)| = \|f\|$. Anschließend finde man ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mu := \alpha \cdot \delta_x \in J(f)$ und $\operatorname{Re}\langle Af, \mu\rangle \leq 0$; hierbei ist δ_x die Punktauswertung in x.)

3. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und (4)

$$\mathrm{H}^1_0(\Omega, \mathbb{R}) := \overline{\mathrm{C}^\infty_c(\Omega, \mathbb{R})}^{\mathrm{H}^1(\Omega,\mathbb{R})} \subseteq \mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

Für $i, j \in \{1, ..., d\}$ sei $a_{ij} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ mit $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, ..., d\}$ und es gebe $\alpha > 0$ mit

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \|\xi\|_2^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und fast alle $x \in \Omega$. Wir betrachten nun den *elliptischen Operator* $(A, D(A))$ mit

$$D(A) := \left\{ u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\colon \sum_{i,j} D_i(a_{i,j} D_j u) \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}) \right\},$$
$$Au := \sum_{i,j} D_i(a_{i,j} D_j u) \text{ für } u \in D(A).$$

Zur Erinnerung: Nach Vorlesung bedeutet

$$\sum_{i,j} D_i(a_{i,j} D_j u) \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}),$$

dass ein $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$ existiert mit

$$-\int_\Omega \sum_{i,j} (a_{i,j} D_j u) D_i \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und in diesem Fall setzt man

$$\sum_{i,j} D_i(a_{i,j} D_j u) \coloneqq f.$$

Man zeige mithilfe des Satzes von Lumer-Phillips, dass $(A, D(A))$ eine kontraktive C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$ erzeugt.
(Hinweis: Man zeige, dass durch

$$[u, v] \coloneqq \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x + \sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} D_i u D_j v \,\mathrm{d}x$$

für $u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ ein Skalarpodukt auf $\mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ gegeben ist, welches äquivalent zum gewöhnlichen Skalarprodukt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ auf $\mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ ist, d.h. es gibt $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\alpha(u, u) \leq [u, u] \leq \beta(u, u)$$

für alle $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R})$. Man verwende nun (analog zur Vorlesung) den Satz von Riesz-Fréchet für den Hilbertraum $(\mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}), [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$, um zu zeigen, dass $I - A$ surjektiv ist.)

4. Sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter Operator auf einem Banachraum X und $(A', D(A'))$ dessen Adjungierte. Zeige: Ist $\lambda \in \varrho(A)$, so ist auch $\lambda \in \varrho(A')$ und es gilt $R(\lambda, A)' = R(\lambda, A')$. (4)

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 7*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 5

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Es sei $(A, D(A))$ ein Operator auf einem Banachraum X, $\lambda \in \varrho(A)$ und $D_0 \subseteq D(A)$ ein Unterraum. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind. (4)

(a) D_0 liegt dicht in $D(A)$ bezüglich der Graphennorm.

(b) $(\lambda - A)D_0$ ist dicht in X.

(c) $A = \overline{A|_{D_0}}$.

2. Sei T eine C_0-Halbgruppe mit Generator $(A, D(A))$ auf einem Banachraum X und $D(A)$ sei mit der Graphennorm versehen. Zeige, dass durch die Einschränkung (4)

$$T_1(t) \coloneqq T(t)|_{D(A)} \text{ für } t \geq 0$$

eine stark stetige Halbgruppe mit Generator $(A_1, D(A_1))$ gegeben ist, wobei

$$D(A_1) = D(A^2),$$
$$A_1 x = Ax \text{ für alle } x \in D(A_1).$$

3. Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir den Raum

$$\mathrm{L}^p_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) \coloneqq \{f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \colon \exists K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt mit } f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^d \setminus K\}.$$

Weiter definieren wir für konjugierte Indizes $1 < p, q < \infty$ (d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) die *Faltung*

(a) von $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ bzw.

(b) von $f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ und $q \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$

durch

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

für $x \in \mathbb{R}^d$.

(i) Zeige: Für konjugierte Indizes $1 < p, q < \infty$ gilt (2*)

$$\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) * \mathrm{L}^q_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathrm{C}(\mathbb{R}^d),$$
$$\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) * \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d).$$

(Hinweis: Für die zweite Inklusion nutze man aus, dass für $1 \leq r < \infty$ $\mathrm{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)$ liegt.)

(ii) Es sei $d \geq 3$ und E das *Newtonsche Potential*. Zeige, dass E genau dann in $\mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ liegt, wenn $q < \frac{d}{d-2}$ gilt. (2*)
Hierzu nutze man folgendes Resultat.
Sei $0 \leq R_1 < R_2$ und betrachte den Kreisring

$$\Omega \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^d \colon R_1 < \|x\| < R_2\}.$$

Für jede messbare Funktion $g\colon (R_1, R_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ und die zugehörige *radiale Funktion*

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(\|x\|)$$

gilt

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma_d \int_{R_1}^{R_2} g(r) r^{d-1}\,\mathrm{d}r,$$

wobei σ_d das Oberflächenvolumen der Sphäre $\mathrm{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \|x\| = 1\}$ ist.

(iii) Sei nun $d \geq 3$, $p > \frac{d}{2}$ und $f \in \mathrm{L}^p_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass $E * f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$. (1*)

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 3$ offen, beschränkt und Dirichletregulär. Weiter sei $p > \frac{d}{2}$ und $m\colon \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ messbar mit $\frac{1}{m} \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. Wir betrachten den Operator $(A, D(A))$ auf $\mathrm{C}_0(\Omega)$ mit

$$D(A) := \left\{ u \in \mathrm{C}_0(\Omega) \colon \exists f \in \mathrm{C}_0(\Omega) \text{ with } \Delta u = \frac{f}{m} \right\},$$
$$Au := f \text{ für } u \in D(A) \text{ mit } \Delta u = \frac{f}{m}.$$

(iv) Zeige, dass $(A, D(A))$ abgeschlossen ist. (2)

Es sei nun m stetig.

(v) Zeige, dass $(A, D(A))$ dissipativ ist. Man darf verwenden, dass für $u \in D(A)$ Lemma (11.4) gilt, d.h. falls $C := \max_{x\in\Omega} u(x) > 0$, so gibt es ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = C$ und $\Delta u(x_0) \leq 0$. (Wir werden in der Übungsgruppe besprechen, warum dies gilt.) (2*)

(vi) Zeige, dass $(A, D(A))$ m-dissipativ ist. (4)
(Hinweis: Man zeige zunächst, dass A surjektiv ist, und mache sich dann klar, dass jeder dissipative, surjektive und abgeschlossene Operator bereits m-dissipativ ist (siehe den Beweis des *surjektiven Lumer-Phillips-Theorems* (10.3)).

(vii) Zeige, dass $(A, D(A))$ eine kontraktive C_0-Halbgruppe erzeugt. (2)

Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 31.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 2*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 6

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Es sei $(A, D(A))$ ein Operator auf einem Banachraum X mit $\varrho(A) \neq \emptyset$. Wir versehen $D(A)$ mit der Graphennorm und betrachten den Operator $(A_1, D(A_1))$ auf $D(A)$, wobei (2*)

$$D(A_1) := D(A^2),$$
$$A_1 x := Ax \text{ für } x \in D(A_1).$$

Zeige: Falls $(A_1, D(A_1))$ Generator einer C_0-Halbgruppe auf $D(A)$ ist, so ist $(A, D(A))$ Generator einer C_0-Halbgruppe auf X.

2. (i) Man zeige mithilfe von Störungstheorie, dass $(A, D(A))$ mit (2)

$$D(A) := \{f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})\colon f, f' \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\},$$
$$Af(x) := f'(x) + f'(0)e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ für } f \in D(A) \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

eine C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ erzeugt. Dabei darf verwendet werden, dass $(B, D(B))$ mit $D(B) := D(A)$ und $Bf := f'$ für $f \in D(B)$ Generator einer C_0-Habgruppe ist (nämlich der Shifthalbgruppe).

(ii) Für Operatoren $(A, D(A))$ und $(B, D(B))$ auf einem Banachraum X definieren wir ihre *Summe* $(A + B, D(A + B))$ durch (2)

$$D(A + B) := D(A) \cap D(B),$$
$$(A + B)x := Ax + Bx \text{ für } x \in D(A + B).$$

Man zeige anhand eines Beispiels, dass die Summe von Generatoren im Allgemeinen kein Generator ist.

3. Sei $(A, D(A))$ der Generator einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X. Zeige, dass (4)

$$D(A^\infty) := \{x \in X : x \in D(A^n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ein wesentlicher Definitionsbereich von A ist (d.h. $D(A^\infty)$ liegt dicht in $D(A)$ bzgl. der Graphennorm).
(Hinweis: Man zeige zunächst, dass $D(A^\infty)$ dicht in X liegt, und wende dann einen Satz aus der Vorlesung an. Für die Dichtheit in X wähle $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty((0, \infty))$ mit $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^1((0,\infty))} = 1$ und betrachte dann für $x \in X$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$x_n := \int_0^\infty n\varphi(nt)T(t)x \,\mathrm{d}t$$

für $n \in \mathbb{N}$.)

4. Es sei $(A, D(A))$ ein Operator auf einem komplexen Hilbertraum H. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind. (4)

(a) A ist selbstadjungiert.

(b) A ist dicht definiert, symmetrisch, abgeschlossen und $\pm i - A^*$ ist injektiv.

5. Es sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter, symmetrischer Operator auf einem kmplexen Hilbertraum H. (4)
Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $\overline{A}$ ist selbstadjungiert.

(b) $(\pm i - A)D(A)$ liegt dicht in H.

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 14 + 6*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 7

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. (i) Zeige, dass der numerische Wertebereich von (2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ die Verbindungsstrecke zwischen λ_1 und λ_2 ist.
Anmerkung: Wegen des Spektralsatzes kennt man damit auch den numerischen Wertebereich beliebiger normaler 2×2 − Matrizen.

(ii) Zeige, dass der numerische Wertebereich von (2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$$

die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist.
(Hinweis: Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $re^{i\theta}$ mit $r \geq 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$ darstellen. Wende dies auf die Koordinaten der Vektoren $v \in \mathbb{C}^2$ mit $\|v\| = 1$ an.)

(iii) Betrachte den komplexen Hilbertraum $H = \ell^2$ und $A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. (2)
Zeige, dass $W(A)$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist.

2. Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(H)$ ein beschränkter Operator. Zeige, dass $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathrm{W}(A)}$. (4)

3. Betrachte den komplexen Hilbertraum $H = \mathrm{L}^2((0,\infty))$ und seien die Operatoren $(A, D(A))$ und $(B, D(B))$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(A) &\coloneqq \mathrm{H}^1_0((0,\infty)), \quad Af \coloneqq -f' \text{ für alle } f \in D(A), \\ D(B) &\coloneqq \mathrm{H}^1((0,\infty)), \quad Bf \coloneqq f' \text{ für alle } f \in D(B). \end{aligned}$$

Dann ist $(D, D(B))$ Generator einer kontraktiven C_0-Halbgruppe auf H (nämlich des Linksshifts; dies muss nicht gezeigt werden).

(i) Zeige, dass $B = A^*$. Insbesondere ist iA symmetrisch. (2)

(ii) Zeige, dass $(A, D(A))$ Generator einer kontraktiven C_0-Halbgruppe ist. Insbesondere ist (4*)

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_- \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

(iii) Zeige, dass $\sigma(A) = \mathbb{C}_-$. (2*)
(Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda < 0$ der Operator $\lambda - A^*$ nicht injektiv ist, denn dann ist $\lambda - A$ nicht surjektiv.)

(iv) Folgere, dass $\overline{W(iA)} = \mathbb{R}$. Insbesondere ist (2)

$$\sigma(iA) = i\mathbb{C}_- \not\subseteq \mathbb{R} = \overline{W(iA)}.$$

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 16.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 4*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 8

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $T\colon \Sigma_\theta \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ eine holomorphe C_0-Halbgruppe mit Generator A auf einem Banachraum X. Zeige, dass T eine eindeutige stark stetige Fortsetzung $\tilde{T}$ auf $\overline{\Sigma_\theta}$ besitzt. Zeige weiter, dass durch $S_\pm(t) \coloneqq \tilde{T}(e^{\pm i\theta}t)$ für $t \geq 0$ C_0-Halbgruppen mit Generatoren $A_\pm$ gegeben sind, wobei $A_\pm = e^{\pm i\theta}A$. (4*)

2. (i) Wir betrachten den Banachraum $X = \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ und definieren den Operator $(A, D(A))$ auf X durch (4)

$$D(A) \coloneqq \{f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})\colon f, f' \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\}, \quad Af \coloneqq f' \text{ für alle } f \in D(A).$$

Zeige, dass $(A, D(A))$ **keine** holomorphe Kontraktionshalbgruppe auf X erzeugt.
(Hinweis: Zeige, dass $i\lambda \in \sigma(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Finde hierfür Funktionen $f_n \in D(A)$ mit $\|f_n\| = 1$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}(i\lambda - A)f_n = 0$.)
Bemerkung: Die Shifthalbgruppe auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ ist somit keine holomorphe Kontraktionshalbgruppe.

(ii) Wir betrachten den komplexen Hilbertraum $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und den Operator $(A, D(A))$ auf H mit (4)

$$D(A) = \mathrm{H}^2(\mathbb{R}) = \mathrm{W}^{2,2}(\mathbb{R}), \quad Af \coloneqq f'' \text{ für alle } f \in D(A).$$

Zeige, dass $(A, D(A))$ eine holomorphe Kontraktionshalbgruppe auf H erzeugt.
Bemerkung: Die Gaußhalbgruppe auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ist also eine holomorphe Kontraktionshalbgruppe.

3. Es sei V ein komplexer Hilbertraum. Eine Sesquilinearform $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig*, falls es ein $M \geq 0$ gibt mit

$$|a(x, y)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

für alle $x, y \in V$.
Zu einer stetigen Sesquilinearform $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir

$$A_a\colon V \longrightarrow V, \quad x \mapsto A_a x$$

wobei zu $A_a x \in V$ das (eindeutig bestimmte) Element in V zu $x \in V$ ist, welches $(A_a x|z) = a(x, z)$ für alle $z \in V$ erfüllt.
Für einen linearen beschränkten Operator $A \in \mathscr{L}(V)$ definieren wir $a_A(x, y) \coloneqq (Ax|y)$ für alle $x, y \in V$.

(i) Zeige, dass stets $A_a \in \mathscr{L}(V)$ gilt und dass a_A stets sesquilinear und stetig ist. Zeige weiter, dass stets $A_{a_A} = A$ und $a_{A_a} = a$ gilt und dass a genau dann sektoriell ist, wenn A_a sektoriell ist. (Zur Erinnerung: a heißt *sektoriell*, wenn es ein $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ gibt, so, dass $a(x) \coloneqq a(x, x) \in \overline{\Sigma_\theta}$ für alle $x \in V$ gilt.) (2)

(ii) Zeige, dass es stets ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, so, dass $A_a - \omega$ sektoriell ist. (2)

4. Sei wiederum V ein komplexer Hilbertraum. Eine Sesquilinearform $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *koerziv*, falls es ein $\alpha > 0$ gibt mit $\operatorname{Re} a(x) \geq \alpha\|x\|^2$ für alle $x \in V$. Es sei a eine koerzive und stetige Sesquilinearform auf V.

(i) Zeige, dass a sektoriell ist. (2)

(ii) Definiere $\|x\|_1 := \sqrt{\operatorname{Re} a(x)}$ für $x \in V$. Zeige, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf V ist und dass diese äquivalent zur gegebenen Norm $\|\cdot\|_V$ auf V ist. (1)

(iii) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass V ein Teilraum eines Hilbertraums H (mit anderer Norm) ist und dass es ein $M \geq 0$ mit $\|x\|_H \leq M \cdot \|x\|_V$ für alle $x \in V$ gibt. Man zeige, dass die von a induzierte Norm $\|\cdot\|_a$ auf V definiert durch (1)

$$\|x\|_a := (\operatorname{Re} a(x) + \|x\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

für $x \in V$ äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ ist.
Anmerkung: Insbesondere zeigt dies, dass die Form a abgeschlossen ist, d.h. V ist bezüglich $\|\cdot\|_a$ vollständig.

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 8*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 9

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Für diese Aufgabe verwenden wir, dass jedes $f \in \mathrm{H}^1((a,b))$ mit einer Funktion in $\mathrm{C}([a,b])$ identifziert werden kann und

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\,\mathrm{d}y$$

für alle $x \in [a,b]$. (Jedes $f \in \mathrm{H}^1((a,b))$ ist eine Äquivalenzklasse von Funktionen. Man kann zeigen, dass jene genau eine stetige Funktion $\mathrm{C}([a,b])$ enthält und identifiziert dann f mit dieser.)
Es sei nun $b > 0$ und $V \coloneqq \{u \in \mathrm{H}^1((0,b))\colon u(0) = 0\}$.

(i) Zeige die *Poincaré-Ungleichung* (2)

$$\int_0^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{b^2}{2}\int_0^b |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x \text{ für alle } u \in V.$$

(ii) Zeige, dass die Sesquilinearform (2)

$$a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (u,v) \mapsto \int_0^b u'(x)\overline{v'(x)}\,\mathrm{d}x$$

stetig und koerziv ist.

(iii) Wir fassen nun V als Unterraum von $H \coloneqq \mathrm{L}^2((0,b))$ auf. Zeige, dass die Form a auf H sektoriell, abgeschlossen und dicht definiert ist. (2)
(Hinweis: Verwende Aufgabe 4 von Blatt 8.)

(iv) Zeige, dass für $f, g \in \mathrm{H}^1((0,b))$ gilt, dass (2)

$$\int_0^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(0)g(0).$$

(v) Man zeige, dass der zu a assoziierte Operator A auf H gegeben ist durch (2)

$$D(A) = \{u \in \mathrm{H}^2((0,b))\colon u(0) = 0, u'(b) = 0\},$$
$$Au = -u'' \text{ für alle } u \in D(A).$$

Hierbei ist

$$\mathrm{H}^2((0,b)) = \{f \in \mathrm{H}^1((0,b))\colon f' \in \mathrm{H}^1((0,b))\}$$

und $f'' \coloneqq (f')'$ für $f \in \mathrm{H}^2((0,b))$.
Anmerkung: Aus den Resultaten der Vorlesung folgt, dass $-A$ Generator einer holomorphen Kontraktionshalbgruppe auf $\mathrm{L}^2((0,b))$ ist.

2. (i) Es sei A Generator einer beschränkten stark stetigen **Gruppe** auf einem Banachraum X. Zeige, dass A^2 Generator einer beschränkten holomorphen C_0-Halbgruppe auf X ist. (4)
(Hinweis: Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ beliebig und $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta}$. Wir finden dann eine Wurzel $\mu = re^{i\alpha}$ von λ mit $|\alpha| < \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \theta)$. Schreibe den Operator $(\lambda - A^2)$ geeignet als Produkt und zeige damit, dass $\lambda \in \varrho(A^2)$ und dass

$$R(\lambda, A^2) = R(\mu, A)R(\mu, -A).$$

Nutze dann diese Identität sowie Abschätzungen für die Resolventen von A und $-A$, um Bedingung (i) in Theorem (20.3) nachzuweisen.)
Anmerkung: Die hier bewiesene Aussage gilt auch im unbeschränkten Fall: Ist A ein Generator einer C_0-Gruppe, so ist A^2 Generator einer holomorphen C_0-Halbgruppe.

(ii) Wir betrachten den Operator A auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ wobei (2)

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})\colon f, f', f'' \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\}, \\ Af &:= f'' \text{ für alle } f \in D(A). \end{aligned}$$

Zeige, dass A eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt.

3. Wir betrachten die folgende Variante der so genannten *Black-Scholes-Gleichung*, die den Wert für Call-Optionen am europäischen Aktienmarkt beschreibt.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(x,t) = -\frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - rx\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + ru(x,t) & \text{für alle } x \in (0,\infty),\ t \in [0,T], \\ u(x,T) = h(x) & \text{für alle } x \in (0,\infty), \end{cases}$$

wobei $\sigma > 0$ (Volatilität), $r > 0$ (Zinssatz) und $T > 0$ (Laufzeit) feste Parameter sind sowie $h \in \mathrm{C}_0((0,\infty))$ eine feste Funktion. Mit Substitution und Reskalierung kann man dieses Problem auf das abstrakte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f'(t) &= Af(t) \text{ für alle } t \geq 0, \\ f(0) &= h \end{aligned}$$

auf dem Raum $\mathrm{C}_0((0,\infty))$ zurückführen, wobei

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{f \in \mathrm{C}^2((0,\infty))\colon q^2 \cdot f'',\ q \cdot f',\ f \in \mathrm{C}_0((0,\infty))\}, \\ Af &:= q^2 \cdot f'' + c \cdot q \cdot f' - cf \text{ für } f \in D(A) \end{aligned}$$

sowie $q(x) := x$ für alle $x \in (0,\infty)$ und $c := \frac{2r}{\sigma^2} > 0$. Wir wollen zeigen, dass $(A, D(A))$ eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt.

(i) Es sei $\eta := \frac{1}{2}(c-1)$ und $(B, D(B))$ gegeben durch (2*)

$$\begin{aligned} D(B) &:= \{f \in \mathrm{C}^1((0,\infty))\colon q \cdot f', f \in \mathrm{C}_0((0,\infty))\}, \\ Bf &:= q \cdot f' \text{ für alle } f \in D(B). \end{aligned}$$

Zeige $D(A) = D(B^2)$ und

$$Af = (B+\eta)^2 f - (1+\eta)^2 f$$

für alle $f \in D(A)$.

(ii) Zeige, dass durch $Vf(x) := f(e^x)$ für $f \in \mathrm{C}_0((0,\infty))$ und $x \in \mathbb{R}$ ein isometrischer Isomorphismus (2*)

$$V\colon \mathrm{C}_0((0,\infty)) \longrightarrow \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$$

definiert wird.

(iii) Zeige, dass der Operator VBV^{-1} (mit Definitionsbereich $\{f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\colon V^{-1}f \in D(B)\}$) gerade die erste Ableitung auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ mit Definitionsbereich (2*)

$$\{f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})\colon f, f' \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})\}$$

ist.

(iv) Folgere nun, dass $(A, D(A))$ eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt. Es darf dafür die allgemeinere Version von Aufgabe 2(i) verwendet werden. (2*)

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 30.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 16*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 10

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Für $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ sei T die zugehörige Halbgruppe, also $T(t) := e^{tA}$ für alle $t \geq 0$. Gib Beispiele für Matrizen $A \neq I$ mit den folgenden Eigenschaften. (5)

(i) $\lim_{t\to\infty} T(t)x = 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^2$.

(ii) T ist *periodisch*, d.h. es gibt ein $t > 0$ mit $T(t) = I$.

(iii) Für alle $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ist die Bahn $\{T(t)x\colon t \geq 0\}$ unbeschränkt.

(iv) Es gibt $x, y \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, so, dass $\{T(t)x\colon t \geq 0\}$ beschränkt und $\{T(t)y\colon t \geq 0\}$ unbeschränkt.

(v) $\omega(A) = 0$, aber T nicht beschränkt.

2. Eine C_0-Halbgruppe T heißt *gleichmäßig stabil*, falls $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$. Es sei nun T eine C_0-Halbgruppe mit Generator A auf einem Banachraum X. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind. (3)

(a) $\omega(A) < 0$.

(b) T ist gleichmäßig stabil.

(c) Es gibt ein $t > 0$ mit $\|T(t)\| < 1$.

(d) Es gibt ein $t > 0$ mit $r(T(t)) < 1$.

3. Eine C_0-Halbgruppe T mit Generator A erfüllt den *schwachen spektralen Abbildungssatz*, falls

$$\sigma(T(t)) = \overline{e^{t\sigma(A)}} \text{ für alle } t \geq 0$$

gilt.

(i) Es sei nun $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit beschränktem Realteil und T die zugehörige Multiplikationshalbgruppe auf $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, d.h. $T(t)f(x) := e^{tq(x)}f(x)$ für alle $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ (siehe Aufgabe 4 von Blatt 1). Zeige: T erfüllt den schwachen spektralen Abbildungssatz.
(Hinweis: Benutze Aufgabe 1 von Blatt 4.) (4)

(ii) Es sei nun T eine C_0-Halbgruppe mit Generator A, die den schwachen spektralen Abbildungssatz erfüllt. Zeige, dass $s(A) = \omega(A)$. (4)

4. Es seien X und Y Banachräume und Y sei ein Unterraum von X (mit nicht unbedingt derselben Norm). Wir nennen die Inklusion $X \subseteq Y$ *stetig*, falls es ein $M \geq 0$ gibt mit $\|y\|_X \leq M\|y\|_Y$ für alle $y \in Y$ gibt.
Es sei nun A ein Operator auf einem Banachraum X. Es sei Y ein weiterer Banachraum mit stetiger Inklusion $Y \subseteq X$ und $A|_Y$ sei der *Teil von A in Y*, d.h.

$$D(A|_Y) := \{y \in D(A) \cap Y\colon Ay \in Y\},$$
$$A|_Y y := Ay \text{ für alle } y \in D(A|_Y).$$

(i) Es sei $\lambda \in \varrho(A)$ mit $R(\lambda, A)Y \subseteq Y$. Zeige, dass dann $\lambda \in \sigma(A|_Y)$ und $R(\lambda, A|_Y) = R(\lambda, A)|_Y$. (2*)

Es sei nun zusätzlich $\varrho(A) \neq \emptyset$, $D(A)$ sei mit der Graphennorm versehen und $D(A) \subseteq Y$ stetig.

(ii) Zeige nun, dass A_1 (siehe Aufgabe 1 von Blatt 6) gleich dem Teil von $A|_Y$ in $D(A)$ ist. (2*)

(iii) Zeige, dass $\sigma(A|_Y) = \sigma(A)$. (1*)
(Hinweis: Benutze (i) und (ii) um $\sigma(A_1) \subseteq \sigma(A|_Y)$ zu zeigen. Wir wissen aus dem Beweis von Aufgabe 1 von Blatt 6, dass A_1 und A *ähnlich* sind, d.h. es gibt einen Isomorphismus $V \in \mathscr{L}(X, D(A))$ (nämlich die Resolvente) mit $A_1 = V^{-1}AV$. Da ähnliche Operatoren dasselbe Spektrum haben (dies muss hier nicht gezeigt werden!), folgt $\sigma(A_1) = \sigma(A)$.)

5. Es sei $1 < p < \infty$. Für jedes $q \in [p, \infty)$ betrachten wir den Raum $X_q := \mathrm{L}^p((1,\infty)) \cap \mathrm{L}^q((1,\infty))$. Durch

$$\|f\| := \max(\|f\|_p, \|f\|_q)$$

für $f \in X_q$ wird eine Norm auf X_q definiert bezüglich welcher X_q vollständig ist. Wir definieren nun $T_q(t)f(x) := f(x \cdot e^t)$ für $f \in X_q$, $x \in (1,\infty)$ und $t \geq 0$. Dann ist T_q eine C_0-Halbgruppe und es sei A_q ihr Generator.

(i) Zeige, dass $\omega(A_q) = -\frac{1}{q}$. (2*)
(Hinweis: Zeige zunächst, dass $\|T_q(t)f\| \leq e^{-\frac{t}{q}}\|f\|$ für alle $f \in X_q$ und $t \geq 0$. Betrachte dann für festes $t \geq 0$ die Funktion $f \in X_q$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & e^t \leq x \leq e^t + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und folgere $\|T_q(t)\| = e^{-\frac{t}{q}}$ für alle $t \geq 0$.)

(ii) Zeige, dass $s(A_q) \geq -\frac{1}{p}$. (2*)
(Hinweis: Betrachte für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda < -\frac{1}{p}$ die Funktion f_λ definiert durch $f_\lambda(x) := x^\lambda$ für $x \in (1,\infty)$. Zeige dann, dass $f_\lambda \in X_q$ und $T(t)f_\lambda = e^{\lambda t} f_\lambda$ für alle $t \geq 0$.)

(iii) Zeige, dass $s(A_q) = -\frac{1}{p}$. Es darf dabei verwendet werden, dass A_q der Teil von A_p in X_q ist[1]. (7*)
(Hinweis: Im Fall $p = q$ wissen wir nach (i) und (ii) nun $s(A_p) = \omega(A_p) = -\frac{1}{p}$. Insbesondere erhalten wir wegen $\omega < 0$ die Resolventendarstellung

$$(R(0, A_p)f)(x) = \int_0^\infty (T_p(s)f)(x)\,\mathrm{d}s.$$

für fast alle $x \in (1,\infty)$ für alle $f \in X_p = \mathrm{L}^p((1,\infty))$. Zeige nun mithilfe geeigneter Abschätzungen, dass

$$D(A_p) = \mathrm{Bild}(R(0, A_p)) \subseteq X_q \subseteq X_p = \mathrm{L}^p((1,\infty))$$

und dass diese Inklusionen stetig sind. Wende dann Aufgabe 4 an.)

Anmerkung: Für $p < q$ gilt also $\omega(A_q) < s(A_q)$.

[1] Dies folgt daraus, dass T_q die Einschränkung von T_p auf X_q ist, siehe etwa Abschnitt II.2.3 in Engel, Nagel: One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 07.07.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 13 + 19*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 11

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.

1. Es sei X ein Banachraum und Y ein abgeschlossener Unterraum von X. Wir betrachten den Quotientenraum X/Y und definieren (4*)

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x,Y) = \inf_{y\in Y} \|x+y\|$$

für $[x] \in X/Y$. Zeige, dass $\|\cdot\|$ eine (wohldefinierte) Norm auf dem Quotientenraum X/Y ist bezüglich welcher X/Y vollständig ist. Zeige weiter, dass die kanonische Projektion $q\colon X \longrightarrow X/Y$ ein beschränkter Operator mit $\|q\| \leq 1$ ist.
(Hinweis: Es sei daran erinnert, dass ein normierter Raum genau dann vollständig ist, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergiert.)

2. Es sei T eine C_0-Halbgruppe mit Generator A auf einem Banachraum X.

(i) Zeige, dass $e^{t\sigma_{ap}(A)} \subseteq \sigma_{ap}(T(t))$ für alle $t \geq 0$. (2)
(Hinweis: Sei $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$. Nutze die Allerweltsformel für die reskalierte Halbgruppe $\tilde{T}$ mit $\tilde{T}(t) := e^{-\lambda t}T(t)$ für $t \geq 0$.)

Es sei nun T normstetig ab $\tau \geq 0$. Wir wollen zeigen, dass $e^{t\sigma_{ap}(A)} = \sigma_{ap}(T(t)) \setminus \{0\}$ für alle $t \geq 0$. Wir betrachten als Hilfsmittel den Raum

$$\ell^\infty(X) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkte Folge in } X\}$$

mit der durch $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(X)$ definierten Norm. Dann ist $\ell^\infty(X)$ ein Banachraum und

$$c_0(X) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge in } X\}$$

ein abgeschlossener Unterraum. Wir erhalten damit (nach Aufgabe 1) einen Banachraum $Z := \ell^\infty(X)/c_0(X)$ und die stetige Quotientenabbildung $q\colon \ell^\infty(X) \longrightarrow Z$.

(ii) Sei $\lambda \in \sigma_{ap}(T(1)) \setminus \{0\}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein zugehöriger approximativer Eigenvektor. Wir betrachten die Funktion (2)

$$u\colon [0,1] \longrightarrow \ell^\infty(X), \quad t \mapsto (T(t+\tau)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Zeige, dass u stetig ist.

(iii) Zeige, dass $q \circ u \neq 0$. (3)
(Hinweis: Zeige, dass für $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \in [\tau, \tau+1)$ gilt, dass $q(u(m-\tau)) = q(\lambda^m (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.)

(iv) Wende Satz die Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten (Satz 21.10 aus der Vorlesung) an, um zu zeigen, dass $k \in \mathbb{Z}$ exisitiert, so, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (2)

$$y_n := \int_0^1 e^{-2\pi i k t} T(t+\tau)x_n \,\mathrm{d}t \in D(A) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

keine Nullfolge in X ist.

(v) Zeige, dass $e^{t\sigma_{ap}(A)} = \sigma_{ap}(T(t)) \setminus \{0\}$ für alle $t \geq 0$. (3*)
(Hinweis: Es genügt den Fall $t = \lambda = 1$ zu betrachten (warum?). Man baue nun aus der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der letzten Teilaufgabe einen approximativen Eigenvektor.)

(vi) Zeige nun, dass T den spektralen Abbildungssatz erfüllt. (1)

3. Es sei A ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}; X)$ und (3)

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

die zugehörige inhomogene Differenzialgeichung. Es seien $u\colon [a,b] \longrightarrow X$ und $v\colon [b,c] \longrightarrow X$ milde Lösungen auf $[a,b]$ bzw. $[b,c]$ mit $u(b) = v(b)$. Zeige, dass dann

$$w\colon [a,c] \longrightarrow X, \quad t \longrightarrow \begin{cases} u(t) & \text{falls } t \in [a,b], \\ v(t) & \text{falls } t \in (b,c] \end{cases}$$

eine milde Lösung auf $[a,c]$ ist.

4. Es sei A ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X. Es sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) A erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf X.

(b) Für jedes $x \in X$ und jedes $\tau > 0$ gibt es genau eine milde Lösung $u_x \in \mathrm{C}([0,\tau]; X)$ von

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) \text{ für alle } t \in [0,\tau], \\ u(0) &= x. \end{aligned}$$

($*$) Gilt (a), so ist die Lösung in (b) jeweils gegeben durch $u_x(t) = T(t)x$ für $t \in [0,\tau]$, wobei T die von A erzeugte C_0-Halbgruppe ist.
Dies wollen wir hier zeigen.

(i) Zeige, dass aus (a) die Aussagen (*) und (b) folgen. (1*)
(Hinweis: Dies ist im Wesentlichen ein Spezialfall eines Satzes aus der Vorlesung.)

(ii) Wir nehmen nun an, dass (b) gilt, und setzen $T(t)x \coloneqq u_x(t)$ für $x \in X$ und $t \geq 0$. Zeige, dass T eine C_0-Halbgruppe ist. (4*)
(Hinweis: Betrachte für $\tau > 0$ die Abbildung

$$\Phi_\tau\colon X \longrightarrow C([0,\tau]; X), \quad x \mapsto u_x|_{[0,\tau]}.$$

Zeige, dass jedes Φ_τ linear und abgeschlossen und somit stetig ist. Folgere dann damit, dass $T(t) \in \mathscr{L}(X)$ für alle $t \geq 0$.)

(iii) Zeige, dass A der Generator der C_0-Halbgruppe T aus (ii) ist. (7*)
(Hinweis: Es sei B der Generator von T und $\lambda > \max(0, \omega(B))$. Zeige, dass $R(\lambda, B)X \subseteq D(A)$ und $(\lambda - A)R(\lambda, B)x = x$ für alle $x \in X$. Nutze hierfür die Integraldarstellung von $R(\lambda, B)$ und partielle Integration. Zeige anschließend, dass $\lambda - A$ injektiv ist und folgere die Behauptung.)

Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 12.07.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 16 + 26*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 12

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Bonusaufgaben.
Meldet Euch bitte im Hochschulportal für die Vorleistung an!

1. Es sei A der Generator einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X. Für $f \in \mathrm{L}^1((0,1);X)$ betrachten wir das inhomogene Problem (6)

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \text{ für } t \in [0,1].$$

Es sei $1 \in \varrho(T(1))$ und für jedes $f \in \mathrm{L}^1((0,1);X)$ sei u_f die eindeutige periodische milde Lösung des obigen Problems. Zeige, dass

$$\Phi\colon \mathrm{L}^1((0,1);X) \longrightarrow \mathrm{C}([0,1];X), \quad f \mapsto u_f$$

ein beschränkter Operator ist.
(Hinweis: Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen reicht es zu zeigen, dass Φ linear und abgeschlossen ist.)

2. Es sei A Generator einer C_0-Halbgruppe auf einem komplexen separablen Hilbertraum H. Zeige, dass (6)

$$\omega(A) = \inf\left\{\omega > s(A)\colon \sup_{\operatorname{Re}\lambda > \omega} \|R(\lambda, A)\| < \infty\right\}.$$

3. (i) Es sei $1 < p < q < \infty$ und es seien X_q, A_q und T_q wie in Aufgabe 5 von Blatt 10. Zeige, dass (6*)

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{q}} \|R(\lambda, A_q)\| < \infty.$$

Dabei darf verwendet werden, dass

$$(R(\lambda, A_q)f)(x) = x^\lambda \int_x^\infty \frac{f(s)}{s^{\lambda+1}}\,\mathrm{d}s$$

für fast alle $x \in (1,\infty)$ für $f \in X_q$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{p}$. (Dies folgt analog zu den Überlegungen in Aufgabe 5 von Blatt 10.)
(Hinweis: Der Beweis ist recht rechenlastig. Es sei $f \in X_q$. Mittels der obigen Darstellung und der Hölderungleichung für p (und den dazu konjugierten Index p') kann man die Norm $\|R(\lambda, A_q)f\|_q$ gleichmäßig abschätzen. Um eine Abschätzung für $\|R(\lambda, A_q)f\|_p$ zu erhalten, erinnere man sich, dass $R(\lambda, A_q)f = R(\lambda, A_p)f$ und $\omega(A_p) = -\frac{1}{p}$.)

(ii) Konstruiere mithilfe von (i) ein Beispiel für eine C_0-Halbgruppe T mit Generator A auf einem Banachraum X, so, dass (4)

$$\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \varrho(A),$$
$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > 0} \|R(\lambda, A)\| < \infty.$$

und $\omega(A) \geq 0$.
Anmerkung: Der Satz von Gearhard-Prüss gilt somit nicht für beliebige Banachräume.

4. Für Hilberträume H_n mit $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *direkte Hilbertraumsumme*

$$H \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n \coloneqq \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in H_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2 < \infty\right\}.$$

(i) Zeige, dass durch $(x|y) := \sum_{n=1}^{\infty}(x_n|y_n)$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ ein inneres Produkt auf H definiert ist, bezüglich dessen H ein Hilbertraum ist. (4*)

(ii) Zeige, dass H separabel ist, falls H_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ separabel ist (3*)

Es sei nun $H_n := \mathbb{C}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und H (wie oben) die direkte Hilbertraumsumme der H_n. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \begin{pmatrix} in & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & in \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(H_n).$$

Weiter sei der Operator A auf H definiert durch

$$D(A) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \colon (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H\},$$
$$A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ für } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$$

und es sei $T(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (e^{tA_n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ und $t \geq 0$.

(iii) Zeige, dass $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \varrho(A)$. (3*)
(Hinweis: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Zeige zunächst für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\lambda \in \varrho(A_n)$ mit

$$R(\lambda, A_n) = R(\lambda - in, A_n - in) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(A_n - in)^k}{(\lambda - in)^{k+1}}.$$

gilt. Setze diese Operatoren anschließend zu einem Operator auf H zusammen.)

(iv) Zeige, dass T eine C_0-Halbgruppe auf H mit Generator A ist und dass $\|T(t)\| \leq e^t$ für alle $t \geq 0$ gilt. Somit ist $\omega(A) \leq 1$. (4*)

(v) Zeige, dass $s(A) = 0$. (2*)
(Hinweis: Zeige, dass $i\mathbb{N} \subseteq \sigma_p(A)$.)

(vi) Zeige, dass $\omega(A) = 1$. (4*)
(Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass $e^{2\pi} \in \sigma(T(2\pi))$ (warum?). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n = H_n$$

und

$$x^n := (0, \ldots, 0, x_n, 0, \ldots) \in H,$$

wobei der einzige nicht-verschwindende Eintrag x_n an n-ter Stelle steht. Zeige, dass $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein approximativer Eigenvektor von $T(2\pi)$ zum approximativen Eigenwert $e^{2\pi}$ ist.)

Anmerkung: Die Resolventenbeschränktheit kann im Theorem von Gearhard-Prüss also nicht weggelassen werden.

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 21.07.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Henrik Kreidler
Sommersemester 2017
Punktzahl: 0 + 16*

Übungen Evolutionsgleichungen: Blatt 13

Die Abgabe zu zweit ist möglich. Falls Ihr Fragen habt oder einen Hinweis braucht, schreibt eine Mail an henrik.kreidler@uni-ulm.de.
Dies ist ein Bonusblatt.
Meldet Euch bitte bis Freitag, 21.07., 10 Uhr im Hochschulportal für die Vorleistung an!

1. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Es sei weiter T eine positive C_0-**Gruppe** auf $X := \mathrm{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit Generator A. Zeige, dass entweder $\sigma(A) \neq \emptyset$ oder X der Nullraum ist. (Hinweis: Angenommen $\sigma(A) = \emptyset$. Dann gilt $R(\lambda, \pm A)f \geq 0$ für jedes $f \in X$ mit $f \geq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (warum?).) (6*)

2. Es sei wieder (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$ sowie $X := \mathrm{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Zu $f \in X$ definieren wir den Betrag $|f| \in X$ durch $|f|(x) := |f(x)|$ für $x \in \Omega$.

(i) Zeige, dass ein beschränkter Operator $S \in \mathscr{L}(X)$ genau dann positiv ist, wenn $|Sf| \leq S|f|$ für alle $f \in X$ gilt. (2*)

Es sei nun T eine positive C_0-Halbgruppe auf $X := \mathrm{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit Generator A.

(ii) Zeige, dass (6*)

$$s(A) = \inf \left\{ \omega > s(A)\colon \sup_{\operatorname{Re}\lambda > \omega} \|R(\lambda, A)\| < \infty \right\}.$$

(Hinweis: Es sei $\omega > s(A)$. Zeige, dass

$$|R(\lambda, A)f| \leq R(\operatorname{Re}\lambda, A)|f| \leq R(\omega, A)|f|$$

für alle $f \in X$ und damit $\|R(\lambda, A)\| \leq \|R(\omega, A)\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.)

(iii) Es sei nun $p = 2$ und der Raum $\mathrm{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ sei separabel. Zeige, dass $s(A) = \omega(A)$. (2*)

Anmerkung: Bei der Bearbeitung der Aufgabe darf natürlich **nicht** das Resultat von Weis verwendet werden, dass für Generatoren A von positiven Halbgruppen auf $\mathrm{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ stets $s(A) = \omega(A)$ gilt.