

①

Evolutionsgleichungen

24.04.2017

ErinnerungSei T eine C_0 -Hgr. auf einem BR X .Der Generator A von T ist definiert durch

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existiert}\}$$

$$Ax := \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \forall x \in D(A).$$

Für $x, y \in X$ sind äquivalent:

$$(a) \quad x \in D(A) \text{ und } Ax = y$$

$$(b) \quad \int_0^t T(s)y \, ds = T(t)x - x. \quad \forall t \geq 0.$$

(2.13) Beispiel (Diagonalhgr. auf L^p)Sei $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ messbar mit nach oben beschränktem Realteil, $p \in [1, \infty)$ und

$$T(t)f(x) := e^{t \cdot q(x)} f(x) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}, f \in L^p(\mathbb{R})$$

Dann ist T C_0 -Hgr. mit Generator A wobei

$$D(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : q \cdot f \in L^p(\mathbb{R})\},$$

$$Af = q \cdot f \quad \forall f \in D(A).$$

Beweis: (nur Generator)

Wir zeigen zunächst:

$$\forall g \in L^p(\mathbb{R}): \left(\int_0^t T(s)g \, ds \right)(x) = \int_0^t e^{s q(x)} g(x) \, ds \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $g \in L^p(\mathbb{R})$. Nach Definition des Riemann-Ints. gilt:

$$\int_0^t T(s)g \, ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (T(s)g) \left(\frac{nt}{N} \right) \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}).$$

Nach der "Umkehrung" des Satzes von Lebesgue

finden wir eine ^{Indexfolge} ~~Reihenfolge~~ $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $N_k \rightarrow \infty$, $N_k < N_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t T(s)g \, ds \right)(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t}{N_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} \left(T\left(\frac{nt}{N_k}\right)g \right)(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t}{N_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} e^{\frac{nt}{N_k}q(x)} g(x) \\ &= \int_0^t e^{sq(x)} g(x) \, ds \end{aligned}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ gilt nun:

$$f \in D(A), \quad g = Af$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t T(s)g \, ds = T(t)f - f \quad \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t e^{sq(x)} g(x) \, ds = e^{tq(x)} f(x) - f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R} \quad \forall t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow g(x) = q(x)f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

" $\Leftarrow$ " folgt durch Multiplikation mit e^{sq} und Integration.

" $\Rightarrow$ " folgt durch Ableiten in 0 (man kann den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} e^{sq(x)} g(x) \, ds$$

entlang einer Folge nehmen, bekommt also kein Problem mit den Nullmengen). $\square$

(2.14) Beispiel (Shiftgr. auf $C_{ub}(\mathbb{R})$)

Betrachte

$C_{ub}(\mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ beschränkt \& glm. stetig}\}$
und $(T(t)f)(x) := f(x+t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0, f \in C_{ub}(\mathbb{R})$.

Dann ist T C_0 -Hgr. mit Generator A

3

wobei

$$D(A) = \{f \in C_{ub}(\mathbb{R}) : f \text{ diffbar und } f' \in C_{ub}(\mathbb{R})\}$$

$$Af = f' \quad \forall f \in C_{ub}(\mathbb{R}).$$

Beweis: (nur Generator)

Es gilt für $f, g \in C_{ub}(\mathbb{R})$:

$$f \in D(A), \quad g = Af$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t T(s)g \, ds = T(t)f - f \quad \forall t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_0^t T(s)g \, ds \right)(x) = T(t)f(x) - f(x) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Die Punktauswertung

$$\delta_x: C_{ub}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(x)$$

Ist $\forall x \in \mathbb{R}$ ein stetiges Funktional, daher

gilt nach (2.6):

$$(*) \Leftrightarrow \int_0^t (f(s)g)(x) \, ds = T(t)f(x) - f(x) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t g(x+s) \, ds = f(x+t) - f(x) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t} \int_{0x}^{tx+t} g(s) \, ds = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ diffbar und } f' = g$$

$\Rightarrow$ " $t \rightarrow 0$: frechtseitig diffbar mit stetiger Abl. $\Rightarrow f$ diffbar
 $\Leftarrow$ " Hauptsatz
 der DTR □

Was ist der Generator der Shiftgr.

auf $L^2(\mathbb{R})$?

$\leadsto$ brauchen neuen Ableitungsbegriff.

(2.15) Beobachtung

Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}) \cap C_c(\mathbb{R})$

erhalten wir mit partiellen Integration:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)dx$$

und für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f''(x)g(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g''(x)dx.$$

(2.16) Definition

Sei $1 \leq p < \infty$. Dann heißt $f \in L^p(\mathbb{R})$ k -mal schwach differenzierbar, falls $\exists f^{(k)} \in L^p(\mathbb{R})$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x)g(x)dx = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f(x)g^{(k)}(x)dx$$

für alle $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. In diesem Fall heißt $f^{(k)}$ k -te schwache Ableitung von f .

$W^{k,p}(\mathbb{R}) := \{ f \in L^p(\mathbb{R}) : f \text{ } k\text{-mal schwach diffbar} \}$
heißt Sobolevraum.

(2.17) Bemerkung

Die schwache Ableitung ist eindeutig,

denn $C_c^\infty(\mathbb{R})$ trennt $L^p(\mathbb{R})$, d.h.

$\forall f_1, f_2 \in L^p(\mathbb{R}), f_1 \neq f_2 : \exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}) :$

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)g(x)dx \neq \int_{\mathbb{R}} f_2(x)g(x)dx.$$

(2.18) Beispiel (Shiftgr. auf $L^2(\mathbb{R})$).

Sei

$$T(t)f(x) := f(x+t) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}, f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dann ist T C_0 -Hgr. mit Generator A

wobei $D(A) = W^{1,2}(\mathbb{R})$,

$$Af = f' \quad \forall f \in D(A).$$

⑤

Idee: Führe die Halbgruppe auf eine bekannte zurück.

(2.19) Lemma

Sei T C_0 -Hgr. mit Generator A auf $BR X$.

Weiter sei $V \in \mathcal{L}(Y, X)$ ein Isomorphismus von einem $BR Y$ nach X (d.h. V ist bijektiv).

Durch

$$S(t) := V^{-1} T(t) V \quad \forall t \geq 0$$

Wird eine C_0 -Hgr. S auf Y definiert mit Generator B wobei

$$D(B) = \{y \in Y : Vy \in D(A)\},$$

$$By = V^{-1} A Vy \quad \forall y \in D(B).$$

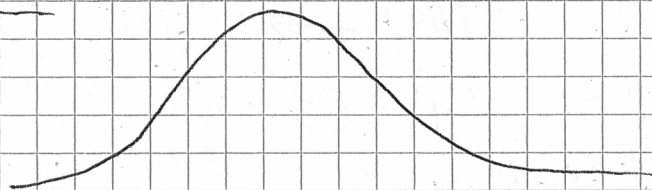
Beweis: $\bar{U} A$.

(2.20) Definition

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, m \in \mathbb{N}_0 : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^n f^{(m)}(x)| = 0\}$$

heißt Schwartzraum.

Bsp. 1 $f(x) = e^{-x^2}$



(2.21) Bemerkung

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R})_+$ für $1 \leq p < \infty$.

(2.22) Definition

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definieren wir die Fouriertrafo Ff durch

$$Ff(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2.23) Satz

(6)

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt:

(i) $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(ii) $(\mathcal{F}f)^{(k)} = \mathcal{F}((-i)^k \cdot \text{id}^k \cdot f) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(iii) $i^k \cdot \text{id}^k \cdot \mathcal{F}f = \mathcal{F}(f^{(k)}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(hier ist $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$)

Beweis: etwa (ii):

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((-i)^k \text{id}^k \cdot f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \cdot (-i)^k \cdot y^k \cdot f(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} e^{-ixy} f(y) dy \\ &\stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \frac{d}{dx} \mathcal{F}(f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Rest: siehe z.B. Werner V.2.2 - V.2.5

(2.24) Theorem

$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist bijektiv und besitzt eine unitäre Fortsetzung

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

(d.h. $(\mathcal{F}f | \mathcal{F}g) = (f | g) \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$).

Weiter gilt $\mathcal{F}(f^{(k)}) = i^k \cdot \text{id}^k \cdot \mathcal{F}f \quad \forall f \in W^{k,2}(\mathbb{R})$.

Beweis: Werner, Abschnitt V.2.

Beweis (von (2.15)):

Betrachte $S(t) := \mathcal{F}T(t)\mathcal{F}^{-1}$ auf $L^2(\mathbb{R})$, $t \geq 0$.

Dann gilt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} S(t)\mathcal{F}f(x) &= (\mathcal{F}T(t)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y+t) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(y-t)} f(y) dy = e^{ixt} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) dy \\ &= e^{tq(x)} (\mathcal{F}f)(x) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $q(x) := ix$ für $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dicht S ist Diagonalhgr. zu q

(7) $\Rightarrow$ S hat Generator B mit

$$(2.13) \quad D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : q \cdot f \in L^2(\mathbb{R})\},$$

$$Bf = q \cdot f \quad \forall f \in D(B)$$

(2.19)

$\Rightarrow$ T ist stark stetig mit Generator A , wobei

$$T(f) = \mathcal{F}^{-1} S(x) \mathcal{F} f$$

$$D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : q \cdot \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

$$A f = \mathcal{F}^{-1} q \mathcal{F} f \quad \forall f \in D(A)$$

Für $f \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ gilt nach (2.24):

$$L^2(\mathbb{R}) \ni \mathcal{F}(f') = i \cdot \text{id} \cdot \mathcal{F}f = q \mathcal{F}f$$

$$\Rightarrow f \in D(A) \text{ und } A f = \mathcal{F}^{-1} q \mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(f') = f'$$

Sei umgekehrt $f \in D(A)$.

$$\Rightarrow - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = - (f | \varphi') \stackrel{(2.24)}{=} - (\mathcal{F}f | \mathcal{F}\varphi')$$

$$\stackrel{(2.23)}{=} - (\mathcal{F}f | i \cdot \text{id} \cdot \mathcal{F}\varphi) = (\mathcal{F}^{-1}(i \cdot \text{id} \cdot \mathcal{F}f) | \varphi) \quad q'' \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(q \cdot \mathcal{F}f)(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f \in W^{1,2}(\mathbb{R})$$

□