Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

Abgabe:
05.07.11

22 $+8^*$ Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 11

Dieses ist das letzte Übungsblatt. Mit den Punkten auf diesem Blatt gab es insgesammt 250 Übungspunkte und 36 Zusatzpunkte. Um die Vorleistungen zu Analysis 2 zu bestehen sind mindestens 125 Punkte nötig.
Bitte meldet Euch so schnell wie möglich, spätestens jedoch bis zum 12. Juli 2011 zu den Vorleistungen zur Analysis 2 an. (Beachte: Es hat prüfungstechnisch *keine* Konsequenzen, wenn man sich zu den Vorleistungen angemeldet hat, diese dann aber nicht besteht.)
Informationen zur Klausur werden in Kürze auf der Homepage der Vorlesung veröffentlicht.

Tutoriumsaufgaben

Von nun an gibt es keine Tutoriumsaufgaben mehr, die verbleibenden Tutorien sollen zur Wiederholung des Stoffes genutzt werden.

Hausaufgaben

88. Berechne das Wegintegral $\int_\gamma v$ falls [7]

(a) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $v(x, y) = (x^2, y^2)$ und $\gamma(t) = (2t, 4t^2)$ für $0 \le t \le 1$.

(b) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $v(x, y, z) = (x+3x^2yz, zx^3, yx^3)$ und $\gamma(t) = (4t, t^2, 1-t)$ für $0 \le t \le 1$.

(c) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $v(x, y) = (xy, ye^x)$ und γ der (geschlossene) Streckenzug $[(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1), (0, 0)]$.

89. Entscheide, ob folgende Vektorfelder Gradientenfelder sind und bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion. [8]

(a) $u(x, y) = (x^2y, y^2x - y)$ (b) $v(x, y) = (6x + y, 6x)$

(b) $w(x, y) = (y \cos x + \cos y, \sin x - x \sin y)$ (d) $f(x, y, z) = (x + 3x^2yz, zx^3, yx^3)$

90. Es sei U eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass [7]

$$d_U(x, y) := \inf\{L(\gamma) \,|\, \gamma : [0, T_\gamma] \to U\,,\ \gamma(0) = x\,,\ \gamma(T_\gamma) = y\,,\ \gamma \text{ stückweise glatt}\,\}$$

eine Metrik auf U definiert. Hier bezeichnet $L(\gamma)$ die Länge des Weges γ. Berechne außerdem $d_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}((-1, 0), (1, 0))$.

Hinweis: Um die Definitheit von d_U zu zeigen, zeige zunächst, dass $\|x - y\|_2 \le L(\gamma)$ für alle Wege γ von x nach y.

91. Eine *exakte Differentialgleichung* ist eine Differentialgleichung der Form [8]

$$p(t, v(t)) + q(t, v(t))v'(t) = 0\,,$$

wobei $p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, sodass (p, q) ein Gradientenfeld ist.

(a) Es sei U eine Stammfunktion von (p, q). Zeige, dass eine differenzierbare Funktion $v : (a, b) \to \mathbb{R}$ genau dann die exakte Differentialgleichung löst, wenn $U(t, v(t))$ auf (a, b) konstant ist.

(b) Es sei $q(t_0, v_0) \neq 0$. Zeige, dass in die Lösung der exakten Differentialgleichung mit $v(t_0) = v_0$ in einer Umgebung von t_0 eindeutig ist. Genauer, zeige, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für zwei Lösungen $v_1, v_2 : (t_0 - \varepsilon + t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit $v_1(t_0) = v_0 = v_2(t_0)$ stets $v_1(t) = v_2(t)$ für alle $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ gilt.

(c) Zeige, dass die Differentialgleichung

$$1 = 2tv(t)^2 + 2t^2 v(t)v'(t)$$

exakt ist und finde eine Lösung v mit $v(1) = 1$.