UNIVERSITÄT ULM

Abgabe:
03.05.11

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

25 Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 2

Von nun an sind, soweit nichts anderes vorrausgesetzt wird, Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ stets mit einer durch eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ induzierten Metrik versehen.

Tutoriumsaufgaben

17. Zeige, dass die Funktion $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$, definiert durch $f(x) := x + x^{-1}$, die Relation $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in [1, \infty)$ erfüllt, aber keinen Fixpunkt besitzt.

Beweise oder widerlege:

18. Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, $D \subset M_1$ dicht und $f, g : M_1 \to M_2$ stetig mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$, so gilt $f = g$.

19. Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, $f : M_1 \to M_2$ stetig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (M_1, d_1), so ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (M_2, d_2).

20. Ist M eine Menge und d die diskrete Topologie, so ist (M, d) vollständig.

21. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(\partial A) = \partial f^{-1}(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}$.

Hausaufgaben

22. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch [6]

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6} & ,(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ,x = y = 0 \end{cases} .$$

Zeige, dass f an der Stelle $(0, 0)$ unstetig ist aber für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ die Einschränkung von f auf die Gerade $G_{\alpha,\beta} := \{\alpha x + \beta y = 0\}$ stetig ist.

23. Es sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{d\times d}$ der Vektorraum aller symmetrischen $d \times d$ Matrizen. Weiter sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ die Menge aller positiv definiten Matrizen. [5]

Zeige, dass $\mathcal{P}$ offen in $\mathcal{S}$ ist.

Hinweis: Folgende Aussagen sind aus der Linearen Algebra bekannt und können bei Bedarf verwendet werden:

(1) Für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $1 \leq k \leq d$ ist der k-te Hauptminor A_k von A gegeben als $A_k := (a_{ij})_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}^{k\times k}$.

(2) Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn $\det(A_k) > 0$ für alle Hauptminoren A_k $(1 \leq k \leq d)$ von A ist.

(3) Für eine (beliebige) Matrix $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ist

$$\det(B) = \sum_{\sigma} b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{k\sigma(k)}$$

wobei sich die Summation über alle Permutationen σ von $\{1, \ldots, k\}$ erstreckt.

24. 1. Beweise das *Haarspalter-Lemma*: [4]

Ist (M, d) ein metrischer Raum, so konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen x, wenn jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge hat die gegen x konvergiert.

2. Es seien $m, d \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Zeige mit Hilfe von Teil 1, dass $f : K \to \mathbb{R}^d$ genau dann stetig ist, wenn $\{(x, f(x)) \,:\, x \in K\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{m+d}$ ist. [4]

25. Es seien I, J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass dann auch die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$, definiert durch [6]

$$F(x) := \sup\{f(x, y) \,:\, y \in J\}, \quad x \in I$$

stetig ist.