Übungen zu Analysis 2

Blatt 7

Das Fußballspiel zwischen den Studenten des 2. Semesters und der Fakultät findet am **30. Juni** ab 16:30 Uhr in der Sportanlage Hörvelsinger Weg statt.

Tutoriumsaufgaben

59. Untersuche folgende Abbildungen auf Differenzierbarkeit und bestimme gegebenenfalls die Ableitung:

(a) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$, gegben durch $f(A) = A^2$.

(b) Die Abbildung $\mathfrak{p} : (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^d$, gegeben durch $\mathfrak{p}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Beweise oder Widerlege:

60. Es gibt eine beschränkte, strikt konvexe Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$.

61. Die Abbildung $\mathfrak{p}$ ist ein Diffeomorphismus zwischen $(0,\infty)\times(0,2\pi)$ und $\mathfrak{p}((0,\infty)\times(0,2\pi))$.

62. Identifiziert man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so ist $f'(z)$ stets $\mathbb{C}$-linear.

Hausaufgaben

63. Bestimme und klassifiziere die kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = (4x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$. [8]

64. Es seien Punkte $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathbb{R}^d$ gegeben. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, gegeben durch [4]

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \|x - a_j\|^2$$

an der stelle $x_0 := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{d} a_j$ ihr globales Minimum annimmt.

65. (Elliptisches Maximumsprinzip) [8]

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte offene Menge, weiter sei $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Das *elliptische Maximumsprinzip* besagt: Ist f harmonisch auf Ω, d.h. $\Delta f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$, so ist $\max\{f(x) : x \in \overline{\Omega}\} = \max\{f(x) : x \in \partial\Omega\}$ (beachte, dass die Maxima aus Kompaktheitsgründen existieren). Es gilt also: Ist f harmonisch, so nimmt f sein Maximum (und auch sein Minimum) am Rand von Ω an.

Beweise das Maximumsprinzip folgendermassen:

(a) Es sei u eine beliebige Funktion in $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Zeige: ist $x_0 \in \Omega$ eine lokale Maximumsstelle von u, so ist $\Delta u(x_0) \leq 0$.

Hinweis: $\Delta u(x) = \mathrm{spur}(H_u(x))$.

(b) Zeige, dass falls $\Delta u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$, so gilt $\max\{u(x) : x \in \overline{\Omega}\} = \max\{u(x) : x \in \partial\Omega\}$.

(c) Nun sei $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch. Definiere $F : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(t,x) := f(x) + t\|x\|^2$. Zeige, dass $\max\{F(t,x) : x \in \overline{\Omega}\} = \max\{F(t,x) : x \in \partial\Omega\}$ für alle $t \in (0,1]$ und folgere mit Aufgabe 25 das elliptische Maximumsprinzip.

Hinweis: Es darf (ohne Beweis) verwendet werden, dass in Aufgabe 25 das Kompakte Interval J auch durch einen beliebigen kompakten metrischen Raum ersetzt werden kann.

Benutze nun das elliptische Maximumsprinzip um zu zeigen:

(d) Sind $f, g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonische Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$, so ist bereits $f = g$.

66. Weil die Menge $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion $f : (x,y) \mapsto yx^2$ auf K ihr Maximum und Minium an. Es stellt sich die Frage, wie man die globalen Extremstellen bestimmen kann. Eine globale Extremstelle in $\overset{\circ}{K}$ ist natürlich ein kritischer Punkt. [5]

(a) Finde die kritischen Punkte von f in $\overset{\circ}{K}$.

Wenn die Minimum- resp. Maximumstelle von f nicht in $\overset{\circ}{K}$ liegt, so muss sie in $\partial K = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ liegen. Ist aber $(x_0, y_0) \in \partial K$ eine Extremstelle von f, so ist (x_0, y_0) auch eine Extremstelle von $f|_{\partial K}$. Wenn man nun in einer Umgebung von (x_0, y_0) eine Variable als Funktion der anderen darstellen kann, so kann man dies in f einsetzten, es ist also $f(x,y) = f(x, y(x))$ oder $= f(x(y), y)$ in einer Umgebung von (x_0, y_0). Dann ist aber im ersten Fall x_0 eine lokale Extremstelle von $x \mapsto f(x, y(x))$ und im zweiten Fall y_0 eine lokale Extremstelle von $y \mapsto f(x(y), y)$. Falls diese Funktionen differenzierbar sind, so ist $\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0$, respektive $\frac{d}{dy} f(x(y), y) = 0$ eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f|_{\partial K}$ in $(x_0, y(x_0)) = (x_0, y_0)$ resp. $(x(y_0), y_0) = (x_0, y_0)$ und somit eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle von f in (x_0, y_0).

(b) Welche Punkte $(x_0, y_0) \in \partial K$ haben eine Umgebung, in der x als eine Funktion von y geschrieben werden kann? Welche eine, in der y als eine Funktion von x geschrieben werden kann. Finde gegebenenfalls die entsprechenden Funktionen.

(c) Finde mit obiger Methode mögliche lokale Extremstellen von f auf ∂K.

(d) Bestimme $\max\{f(x,y) : (x,y) \in K\}$ und $\min\{f(x,y) : (x,y) \in K\}$