Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

Abgabe:
14.06.11

23+2* Punkte

Übungen zu Analysis 2

Blatt 8

Halbzeit: Mit dem 6. Übungsblatt sind die Hälfte der Übungsblätter in diesem Semester korrigiert. Bei den Blättern 1 – 6 gab es insgesamt 135 Punkte und 18 Bonuspunkte. Wer also bislang mehr als 67,5 Punkte erreicht hat, hat über 50 % der Übungspunkte.

Tutoriumsaufgaben

67. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ sei differenzierbar und die Jakobi-Matrix von f in $\mathbf{0} = (0,0,0,0,0)$ ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nach welchen Variablen $x_1, \ldots, x_5$ lässt sich die Gleichung $f(x) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{0}$ auflösen? Berechne gegebenenfalls die Ableitung der auflösenden Funktion in $\mathbf{0} = (0,0,0)$.

68. Zeige, dass für genügend nahe bei 1 liegende w, x, y und z die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} w^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ wx^2 + e^{y-1} &= 2y \\ 1 + \log w - zx^2 y &= 0 \end{aligned}$$

eine differenzierbare Funktion von w darstellen und bestimme die Ableitung dieser Funktion an der Stelle 1.

Hausaufgaben

69. Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen , $f \in C^1(U)$, $x_0 \in U$ und $f(x_0) =: c$. Zeige, dass der Gradient $\nabla f(x_0)$ senkrecht auf der Niveaufläche $N_f(c) := \{x \in U : f(x) = c\}$ steht, d.h. ist $\varphi \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^d)$ mit $\varphi(0) = x_0$ und $\varphi(t) \in N_f(c)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, so folgt $(\nabla f(x_0), \varphi'(0)) = 0$. [6]

70. Es sei $T : [0, \infty) \to \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Abbildung mit $T(0) = I$, sodass $T(t + s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$. [7]

(a) Zeige: T ist genau dann differenzierbar, wenn T stetig ist. Zeige, dass in diesem Fall $T'(t) = T'(0)T(t)$ für alle $t \geq 0$

Anleitung: Im ersten Teil ist nur zu zeigen, dass T differenzierbar ist, wenn T stetig ist. Definiere hierzu $V(t) := \int_0^t T(s)\,ds$. Dann ist $V(t)$ differenzierbar mit $V'(t) = T(t)$. Insbesondere gilt $t^{-1}V(t) \to I$ für $t \to 0$. Folgere, dass $V(\varepsilon)$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ invertierbar ist zeige dann, dass $T(t) = V(\varepsilon)^{-1}(V(t + \varepsilon) - V(t))$ für alle $t \geq 0$. Folgere hieraus, dass T differenzierbar ist.

Hinweis: Die Differenzierbarkeit an der Stelle 0 ist als rechtsseitige Differenzierbarkeit zu verstehen.

(b) Zeige: Ist T differenzierbar, so ist

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k T'(0)^k}{k!} \, .$$

Anleitung: Definiere $S(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k T'(0)^k}{k!}$. Dann ist S differenzierbar mit $S'(t) = T'(0)S(t)$ (dies darf ohne Beweis verwendet werden). Leite nun die Funktion $U : [0,t] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ definiert durch $U(s) := T(s)S(t-s)$ ab.

71. Betrachte die Abbildung $\mathfrak{z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $\mathfrak{z}(r,\varphi,z) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. [6]

(a) Berechne die Jakobi-Matrix von $\mathfrak{z}$ und untersuche, in welchen Punkten $\mathfrak{z}$ lokal umkehrbar ist.

(b) Zeige, dass $\mathfrak{z}$ ein Diffeomorphismus von $(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^3\setminus[0,\infty)\times\{0\}\times\mathbb{R}$ ist und berechne die Umkehrabbildung und deren Jakobi-Matrix.

72. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Berechne die Jakobi-Matrix von f und, wo sie existiert, ihre Inverse. Zeige weiter, dass f surjektiv ist und dass jeder Punkt $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ genau zwei Urbildpunkte bezüglich f besitzt. [6]